

**Modèles de Lévy exponentiels en finance :  
mesures de f-divergence minimale  
et modèles avec change-point**

THESE DE DOCTORAT

Mathématiques appliquées

ECOLE DOCTORALE STIM

Présentée et soutenue publiquement  
le 1er juillet 2010  
  l'Université d'Angers  
par **Suzanne Cawston**

Devant le jury ci-dessous :

Rapporteurs : M. Yuri KABANOV, Professeur, Université de Franche-Comté  
M. Martin SCHWEIZER, Professeur, ETH Zürich  
Examineurs : M. Loïc CHAUMONT, Professeur, Université d'Angers  
M. Yuri KUTOYANTS, Professeur, Université du Maine  
M. Victor RIVERO, Maître de conférences, CIMAT Guanajuato  
M. Marc YOR, Professeur, Université Pierre et Marie Curie  
Directrice de thèse : Mme Lioudmila VOSTRIKOVA, Professeur, Université d'Angers

LAREMA, UMR 6093, Université d'Angers,  
2 Bld Lavoisier, 49045 ANGERS Cedex

ED N 503



# Remerciements

En premier lieu, merci à Mme Vostrikova, qui a d'abord réussi il y a déjà longtemps à me faire aimer les probabilités ! Je lui suis aussi très reconnaissante d'avoir été la première à m'encourager à poursuivre dans cette voie, puis d'avoir consacré beaucoup de temps à la direction de ma thèse, en montrant une patience à toute épreuve.

Je remercie Martin Schweizer et Yuri Kabanov d'avoir accepté d'être rapporteurs. Leur lecture attentive de la thèse a conduit à de nombreuses améliorations. Je suis également très honorée que Marc Yor ait pris le temps de regarder mon travail, et suis reconnaissante pour toutes ses remarques et suggestions de lecture. Je remercie Loïc Chaumont, Yuri Kutoyants et Victor Rivero pour leur participation à mon jury ; ils représentent différents aspects de ces années de thèse. Les exposés de Loïc Chaumont et de ses invités m'ont beaucoup appris sur les processus de Lévy. De même, différents séminaires au Mans, ainsi que les conférences SAPS, m'ont permis de découvrir de nouvelles mathématiques. Victor Rivero, ainsi que Maria Emilia Caballero, m'ont très gentiment accueillie lors de mon séjour au Mexique, dans le cadre d'un projet ECOS.

Au fil des années, les enseignants du département de Mathématiques d'Angers, ont su, outre assurer de très bons cours, m'encourager et me conseiller dans mes choix. Je leur suis aussi reconnaissante pour la grande bienveillance qu'ils m'ont montré pendant toute la thèse. Merci aussi à Catherine et Mme Bock, puis Alexandra et Caroline, pour leur disponibilité et toutes nos discussions qui ont égayé bien des pauses. J'ai eu la chance de côtoyer au LAREMA de nombreux doctorants, et nos échanges mathématiques ou non ont certainement rendu le travail plus agréable. Julie, Kana et Yafei méritent une mention très spéciale pour avoir supporté mes bavardages, et pour d'excellents moments partagés en I104.

Merci aussi à la grande famille de l'église, et aux amis éparpillés en France et ailleurs, pour leur soutien et pour m'avoir aidée à garder en tête l'essentiel. Mes parents m'ont transmis le goût d'apprendre et de réfléchir sans lequel je ne me serais jamais lancée dans ce travail. Mais je les remercie surtout, ainsi que Myriam et Hélène, pour leurs excellents conseils, leurs encouragements et tous les bons moments passés ensemble, qui m'ont permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Modèles de Lévy exponentiels</b>	<b>8</b>
1.1 Processus de Lévy . . . . .	8
1.2 Description du marché financier . . . . .	10
1.3 Modèles de Lévy et mesures martingales équivalentes . . . . .	13
1.4 Prix d'options et stratégies optimales . . . . .	15
<b>2 Propriétés de continuité des prix d'options</b>	<b>18</b>
2.1 Introduction . . . . .	18
2.2 Continuité des prix d'options . . . . .	19
2.3 Application au cas de mesures $f$ -minimales . . . . .	25
2.3.1 Mesures minimisant l'entropie relative ( $\gamma = -1$ ) . . . . .	25
2.3.2 Mesures minimisant une $f^q$ -divergence, $q > 1$ ( $\gamma > -1$ ) . . . .	34
2.3.3 Mesures minimisant une $f^q$ -divergence, $q < 1$ ou une diver- gence logarithmique ( $\gamma < 1$ ) . . . . .	42
2.4 Continuité en $\gamma$ des prix associés aux mesures $f_\gamma$ -minimales . . . . .	46
2.4.1 Ensemble d'existence d'une mesure $f_\gamma$ -minimale . . . . .	46
2.4.2 Continuité en $\gamma$ des prix . . . . .	47
<b>3 Préservation de la propriété de Lévy</b>	<b>52</b>
3.1 $f$ -divergences et mesures minimales . . . . .	54
3.2 Etude de deux modèles élémentaires . . . . .	56
3.3 Préservation de la propriété de Lévy . . . . .	58
3.3.1 Lemmes préparatoires . . . . .	60
3.3.2 Une décomposition pour les mesures qui préservent la propriété de Lévy . . . . .	65
3.3.3 Une équation pour la mesure minimale . . . . .	72
3.3.4 Etude du support de $Z_T^*$ . . . . .	74
3.3.5 Preuve du Théorème 3.2, 1er cas : $supp(\nu)$ est d'intérieur non- vide . . . . .	77
3.3.6 Preuve du Théorème 3.2, 2eme cas : la matrice $c$ est inversible	78
3.3.7 Preuve du Théorème 3.1 : Mesure minimale pour les fonctions de la forme $f''(x) = ax^\gamma$ . . . . .	80
3.3.8 Un contre-exemple lorsque $c$ n'est pas inversible . . . . .	83
3.4 Invariance par changement d'échelle . . . . .	84
3.5 Application aux stratégies optimales . . . . .	85

<b>4</b>	<b>Modèles avec change-point</b>	<b>89</b>
4.1	Description du modèle . . . . .	89
4.1.1	Modélisation des actifs risqués . . . . .	89
4.1.2	Filtrations . . . . .	90
4.2	Mesures martingales équivalentes . . . . .	93
4.3	Mesures martingales $f$ -minimales . . . . .	97
4.3.1	Preuve du Théorème 4.10 . . . . .	99
4.3.2	Le cas $f''(x) = ax^\gamma$ . . . . .	100
4.4	Stratégies optimales . . . . .	102
4.5	Prix d'options dans un modèle avec change-point . . . . .	107
	<b>Conclusion</b>	<b>111</b>

# Introduction

La modélisation probabiliste de l'évolution du prix d'actifs risqués a débuté avec les travaux de Bachelier en 1900 ([4]) qui proposait l'utilisation du Mouvement Brownien. Par la suite, de nombreux modèles ont été introduits parallèlement au développement de la théorie des processus stochastiques. Le plus connu d'entre eux, introduit par Samuelson en 1965 ([67]), consiste à représenter le prix d'un actif risqué par un Mouvement Brownien géométrique. L'obtention de formules relativement simples pour les prix d'options par Black-Scholes [9] et Merton [55] a valu une grande popularité à ce modèle, encore utilisé aujourd'hui dans l'industrie financière. Cependant, sa capacité à représenter de façon convenable les réalités du marché a été critiquée. En particulier, des tests statistiques sur des données issues des marchés montrent que l'adéquation pour la loi des log-retours est relativement mauvaise (cf. Eberlein, Keller [25]). On représente par exemple ici les log-retours journaliers des prix de l'action "Société Générale" sur la période allant du 3 janvier 2007 au 22 septembre 2008 ainsi que la densité de la loi normale obtenue par maximisation de la vraisemblance.

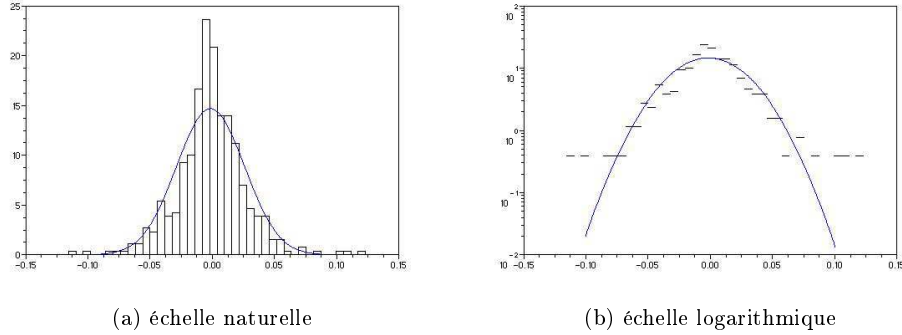


FIG. 1: Log-retours journaliers "Société Générale"

On observe de façon générale, et en particulier sur cet exemple, que la loi normale ne donne pas assez de poids aux très petites variations (Fig. (1.a)), ni aux très grandes variations (Fig. (1.b)). Ces défauts ont conduit dans les années 80 à l'introduction de nouveaux modèles basés sur des processus stochastiques plus complexes. Plusieurs d'entre eux reposent sur l'idée que l'échelle de temps économique suit une horloge financière différente de l'échelle de temps naturelle, pouvant néanmoins être représentée par un processus stochastique (Geman [84]). Par exemple, dans les modèles hyperboliques généralisés (Eberlein, Keller [25], Eberlein [21],[22], Prause[63]), on suppose que l'horloge  $(\tau_t)_{t \geq 0}$  est donnée par un processus  $GIG(\lambda, \delta, \sqrt{\alpha - \beta})$

(Barndorff-Nielsen [5]), où  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $0 \leq |\beta| < \alpha$ . Le logarithme du prix de l'actif risqué est alors représenté par un processus de la forme

$$X_t = \mu t + \beta \tau_t + W_{\tau_t}$$

où  $\mu$  est le drift déterministe et  $W$  est un Mouvement Brownien standard, indépendant du processus  $\tau$ . Tout comme dans le modèle de Black-Scholes,  $X$  est un processus de Lévy, c'est-à-dire que ses accroissements sont indépendants et stationnaires. Cependant, contrairement au cas Brownien, les trajectoires d'un processus hyperbolique généralisé ne sont pas continues. On peut d'ailleurs montrer qu'un tel processus n'admet pas de composante martingale continue et qu'il existe une infinité de sauts sur tout intervalle de temps. Cette famille de modèles permet d'obtenir une excellente adéquation pour la loi des log-retours des prix d'actions. On peut par exemple comparer pour les données considérées précédemment l'adéquation à une loi normale et celle à une loi hyperbolique, c'est-à-dire une loi hyperbolique généralisée avec  $\lambda = 1$ . Les estimations des paramètres du maximum de vraisemblance sont ici obtenues par une méthode de descente de gradient, décrite par Blaesild, Sorensen [10].

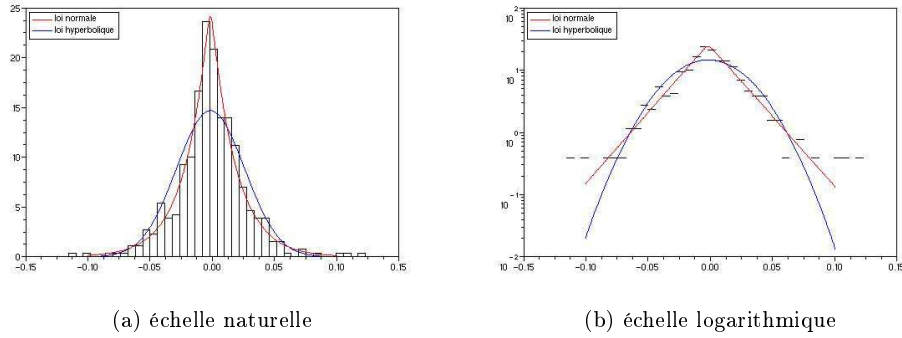


FIG. 2: Comparaison de l'adéquation aux lois normale et hyperbolique

Il a été montré dans Eberlein, Ozkan [26] que cette qualité de l'ajustement est préservée lorsqu'on considère des données à des intervalles très courts. De plus, plusieurs modèles populaires, dont celui de Black-Scholes, peuvent être obtenus comme des cas limites de modèles hyperboliques généralisés. Malgré ces qualités, les processus de cette famille sont tous à variation infinie. Or il a été suggéré par Carr, Geman, Madan, Yor [12] qu'il est parfois plus approprié d'utiliser des processus à variation finie dans la modélisation d'actifs financiers. Une famille de modèles de Lévy exponentiels qui inclut à la fois des processus à variation finie et infinie est obtenue lorsque  $X$  est un processus CGMY. Il s'agit d'un processus de Lévy purement discontinu dont la mesure de Lévy est de la forme

$$\nu(dx) = \frac{C}{|x|^{Y+1}} (e^{-G|x|} \mathbf{1}_{\{x < 0\}} + e^{-Mx} \mathbf{1}_{\{x > 0\}})$$

où  $C > 0$ ,  $G \geq 0$ ,  $M \geq 0$ ,  $Y < 2$  sont les paramètres du modèle. Cette famille généralise le modèle Variance-Gamma, introduit en 1991 dans Madan, Seneta [54] et qui correspond au cas  $Y = 1$ .



On considère plus généralement dans cette thèse que l'évolution du prix de  $d$  actifs risqués est représentée par un processus  $S = (e^{X^{(1)}}, \dots, e^{X^{(d)}})$ , où  $X$  est un processus de Lévy à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Dans le **Chapitre 1**, on définit le cadre du travail. On rappelle les résultats principaux sur les processus de Lévy utilisés par la suite et on décrit quelques caractéristiques d'un marché financier associé à un modèle de Lévy exponentiel.

Le **Chapitre 2** est consacré à l'étude de propriétés de continuité des prix d'options. En effet, les paramètres d'un modèle sont généralement calibrés à partir de données du marché et sont supposés constants sur un certain intervalle de temps. Cependant, l'information dont disposent les acteurs du marché croît continuellement ; il est légitime de supposer que les paramètres du modèle varient en conséquence. Il est donc intéressant de se demander quelle influence une petite variation des paramètres peut avoir sur les prix d'options associés. On considère ici toutes les options avec une échéance fixée  $T$ , pour lesquelles la fonctionnelle  $g$  qui définit le payoff est continue et telle qu'il existe des constantes  $A, B$  positives pour lesquelles

$$g(S) \leq A \sup_{s \leq T} S_s + B. \quad (1)$$

En particulier, les options de vente et d'achat européennes, asiatiques ou lookback vérifient ces propriétés. On rappelle qu'on associe alors à l'option le prix  $E_Q[g(S)]$ , où  $Q$  est une mesure martingale équivalente, c'est-à-dire une mesure équivalente à la mesure initiale, sous laquelle le processus de prix  $S$  est une martingale. On suppose de plus que les mesures martingales considérées préservent la propriété de Lévy, c'est-à-dire que le processus  $X$  est encore un processus de Lévy sous cette nouvelle mesure. Cette condition n'est pas très contraignante puisqu'il a été montré dans Eberlein, Jacod [24] et Jakubenas [42] que pour un grand nombre de modèles et de fonctions de payoff, l'intervalle de prix correspondant à ces mesures recouvre entièrement l'intervalle de non-arbitrage. On formalise alors le problème de la façon suivante : on considère une suite d'espaces probabilisés filtrés  $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{F}^n, P^n)$  à laquelle est associée une suite de processus de Lévy  $X^n$ , de caractéristiques  $(b_n, c_n, \nu_n)$ .

Le premier résultat principal de ce chapitre est le **Théorème 2.1**. On considère une suite de mesures martingales  $Q^n$  associées aux paramètres de Girsanov  $(\beta_n, Y_n)$  et on obtient des conditions de convergence sur les suites de caractéristiques et de paramètres de Girsanov qui garantissent la convergence de la suite de prix associés pour toutes les options qui vérifient (1). Ce résultat se montre d'une part à partir des résultats sur la convergence en loi des processus de Lévy de Jacod, Shiryaev [41], et d'autre part, par une propriété d'uniforme intégrabilité qui découle de la factorisation de Wiener-Hopf.

Dans un deuxième temps, on suppose que la suite de processus de Lévy converge en loi sous les mesures initiales. On s'intéresse alors aux conditions sous lesquelles la suite de prix d'options associée converge. Ce type de problème a par exemple été étudié par Shiryaev [74] et Hubalek, Schachermayer [37] dans le cadre d'une suite de modèles discrets convergeant vers le modèle de Black-Scholes. Le deuxième résultat important de ce chapitre (**Théorème 2.2**) consiste à obtenir pour une suite de modèles de Lévy exponentiels, des conditions sur les paramètres de Girsanov  $(\beta^n, Y^n)$  qui impliqueront la convergence de la suite de prix associés.

Aucune hypothèse n'est faite dans ces premiers résultats sur le choix de la mesure martingale. Dans la pratique, on choisit en général une mesure en appliquant

un critère d'optimisation sur l'ensemble des mesures martingales équivalentes. Les choix les plus classiques consistent à rechercher la mesure martingale  $Q$  qui minimise  $E[f(\frac{dQ}{dP})]$ , où  $f$  est une fonction strictement convexe et  $P$  désigne la mesure initiale. On s'intéresse ici aux mesures minimales associées aux fonctions les plus couramment employées, à savoir l'entropie relative donnée par  $f(x) = x \ln(x)$ , et étudiée par Miyahara, Fujiwara [32], [56] et Hubalek, Sgarra [38], la divergence logarithmique donnée par  $f(x) = -\ln(x)$  et considérée par Kallsen [49], et les  $f^q$ -divergences qui sont les fonctions puissances de la forme  $f(x) = x^q$ , avec  $q > 1$  ou  $q < 0$  (Jeanblanc, Klöppel, Miyahara [43]). On peut noter que toutes ces fonctions vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$  pour un  $a > 0$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ . On étudie alors en fonction de  $\gamma$  le comportement asymptotique de la suite de prix associés à une mesure minimale (Théorèmes 2.8, 2.15, 2.19). On obtient en particulier des exemples et des contre-exemples, (cf. exemples 2.1 à 2.5), à la convergence vers le prix associé à la mesure minimale pour le modèle limite.

La fin du chapitre est consacrée à un nouveau problème de continuité qui apparaît en lien avec l'étude précédente : on considère un modèle de Lévy fixé et on cherche à obtenir des propriétés de continuité en  $\gamma$  des prix associés aux mesures  $f_\gamma$ -minimales, où  $f_\gamma''(x) = ax^\gamma$ .

Le **Chapitre 3** est consacré à l'étude de la préservation de la propriété de Lévy et de l'invariance par changement d'intervalle de temps pour les mesures minimales. En effet, il a été noté dans Essche, Schweizer [29] et Klöppel [49] que pour l'entropie relative, la divergence logarithmique ou les  $f^q$ -divergences, la mesure minimale, lorsqu'elle existe, préserve la propriété de Lévy : le processus  $X$  reste un processus de Lévy sous la mesure minimale  $Q$ . De plus, pour ces fonctions, la mesure minimale ne dépend pas de l'intervalle de temps considéré. On cherche dans ce chapitre à déterminer plus précisément les fonctions régulières qui vérifient ces propriétés. On montre d'abord par l'étude de modèles élémentaires, que la préservation de la propriété de Lévy n'est pas nécessairement vérifiée par une mesure minimale. Le résultat principal de ce chapitre est le **Théorème 3.2**. On y montre que pour la plupart des modèles de Lévy, et sous certaines conditions d'intégrabilité sur la densité de la mesure minimale, les fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$ ,  $a > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , sont les seules à préserver la propriété de Lévy.

On s'intéresse ensuite plus en détail aux fonctions de la forme  $f''(x) = ax^\gamma$ . On donne dans le **Théorème 3.1**, des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une mesure minimale ainsi qu'une expression des paramètres de Girsanov qui lui sont associés.

L'intérêt de l'étude des mesures minimales réside en grande partie dans leur utilisation pour la détermination de stratégies optimales. En effet, il a été montré dans Bellini, Frittelli [6], Frittelli [31], et Goll, Rüschendorf [34] qu'une dualité existe entre la recherche d'une stratégie maximisant une certaine fonction d'utilité  $u$  et la minimisation de la  $f$ -divergence associée à la fonction convexe conjuguée à  $u$  sur l'ensemble des mesures martingales. Ainsi, la minimisation de l'entropie relative est liée à la maximisation d'une utilité exponentielle, la minimisation d'une  $f^q$ -divergence à la maximisation d'une utilité puissance et la minimisation d'une divergence logarithmique à la maximisation d'une fonction d'utilité logarithmique. On donne dans le **Théorème 3.24** une expression des stratégies optimales pour les fonctions d'utilité associées aux  $f$ -divergences qui préservent la propriété de Lévy et pour lesquelles la mesure minimale est invariante par changement d'échelle. Ceci signifie que la mesure

$f$ -minimale  $Q^*$ , si elle existe, minimise sur l'ensemble des mesures martingales la quantité  $E_P[f(c \frac{dQ_t}{dP_t})]$ , pour tout  $t \geq 0$  et tout  $c > 0$ . On obtient en particulier une expression unifiée de la stratégie optimale pour les utilités exponentielle, logarithmique, ou puissance qui correspondent aux  $f$ -divergences de la forme  $f''(x) = ax^\gamma$ .

Le **Chapitre 4** concerne l'étude de modèles de Lévy exponentiels avec change-point. Dans un marché financier, différents événements peuvent entraîner un changement du comportement du prix d'un actif risqué. Certains d'entre eux, comme la divulgation d'information dans la presse ou un changement brutal du prix d'une matière première ne dépendent pas du prix de l'actif lui-même, tandis que d'autres, comme le premier instant d'atteinte d'un seuil psychologique pour le prix de l'actif risqué en sont une fonction directe. Ce type de dépendance du temps des paramètres peut être modélisé à l'aide de fonctions constantes par morceaux. Nous appelons un tel modèle, modèle avec change-point. L'étude de problèmes de change-point a probablement débuté avec les articles de Page [59],[60] dans un contexte d'a posteriori et les travaux de Shiryaev dans le cadre de la détection la plus rapide [73]. Ces questions ont ensuite été considérées dans de nombreux articles, par exemple par Vostrikova [79],[80],[81],[82] en ce qui concerne la détection de changements dans la moyenne de processus de Wiener, ou par Kutoyants pour la détermination d'instant de changement pour les paramètres de diffusions [51]. Dans un contexte financier, la question de la détection a notamment été étudiée dans Shiryaev [75], Dias, Embrechts [20], Andreou, Ghysels [2]. Le problème du calcul de prix d'options a également été considéré par Guo [35], Elliott, Chan, Siu [27]. Nous nous limitons ici à un cas très simple : on considère un instant de change-point  $\tau$  de loi  $\alpha$ , indépendant de l'évolution du prix de l'actif risqué, et on suppose que le prix de l'actif risqué est modélisé de part et d'autre du change-point par des modèles de Lévy exponentiels associés à des processus de Lévy  $L$  et  $\tilde{L}$  respectivement. Le but de ce chapitre est d'obtenir dans ce cadre des résultats concernant la minimisation de  $f$ -divergence sur l'ensemble des mesures martingales, puis de les appliquer à la détermination de stratégies maximisant une fonction d'utilité. Une  $f$ -divergence étant donnée, on suppose que les deux modèles de Lévy associés aux processus  $L$  et  $\tilde{L}$  admettent des mesures  $f$ -minimales. On suppose de plus que ces mesures minimales préservent la propriété de Lévy et sont invariantes par changement d'échelle. On montre alors dans le **Théorème 4.10** que la mesure minimale pour le modèle avec change-point peut s'exprimer en fonction des mesures minimales associées aux deux processus de Lévy sous-jacents. En particulier, pour les fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$ , on obtient une expression entièrement explicite de la densité de la mesure minimale. Ce résultat nous permet alors d'obtenir une expression des stratégies optimales pour les fonctions d'utilité associées aux fonctions convexes de la forme  $f''(x) = ax^\gamma$  (**Théorème 4.16**). On donne finalement les expressions pour quelques prix d'options dans un modèle avec change-point. On étudie plus particulièrement le cas du modèle de Black-Scholes et on compare, dans ce cadre, les prix associés aux différentes mesures  $f_\gamma$ -minimales.

# Chapitre 1

## Modèles de Lévy exponentiels

### 1.1 Processus de Lévy

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  un espace probabilisé fixé.

**Définition 1.1** *Un processus  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  défini sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , adapté et càdlàg, est un processus de Lévy si :*

- i) Pour tous  $s, t \geq 0$ ,  $X_{t+s} - X_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$ .*
- ii) Pour tous  $s, t \geq 0$ ,  $X_{t+s} - X_s$  a même loi que  $X_t$ .*
- iii)  $X_0 = 0$  p.s*

Dans la suite on supposera que  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est la complétée de la filtration engendrée par le processus  $X$ . L'indépendance et la stationnarité des accroissements du processus  $X$  permettent de montrer la continuité à droite de la filtration  $\mathbb{F}$  (cf.[8], Ch1.Prop 4) : pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s.$$

Il découle immédiatement de la définition qu'un processus de Lévy est un processus de Markov, mais on peut également montrer que la propriété de Markov forte est vérifiée :

**Théorème 1.2 (Propriété de Markov forte, [8] Ch1.Prop.6)** *Soit  $\tau$  un temps d'arrêt tel que  $P(\tau < +\infty) > 0$ . Alors conditionnellement à  $\{\tau < +\infty\}$ , le processus  $(X_{\tau+t} - X_\tau)_{t \geq 0}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_\tau$  et a même loi que  $X$ .*

On rappelle maintenant quelques propriétés des sauts d'un processus de Lévy. On note  $\mu^X$  la mesure de sauts associée à  $X$  définie par

$$\mu^X(\omega, dt, dx) = \sum_{0 \leq s < +\infty} \mathbf{1}_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \delta_{(s, \Delta X_s)}(dt, dx)$$

où  $\delta$  représente la mesure de Dirac. L'indépendance et la stationnarité des accroissements de  $X$  se reflètent dans les processus de sauts associés :

**Théorème 1.3 ([64], Ch1. Th.39)** *Soit  $X$  un processus de Lévy et  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d*})$  tels que  $0 \notin \bar{\Lambda}_1 \cup \bar{\Lambda}_2$  et  $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ . Alors les processus*

$$Y = \sum_{0 < s \leq \cdot} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{\Delta X_s \in \Lambda_1\}} \text{ et } Z = \sum_{0 < s \leq \cdot} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{\Delta X_s \in \Lambda_2\}}$$

sont des processus de Lévy indépendants.

Ici, et dans toute la suite,  $\mathbb{R}^{d*}$  représente l'ensemble  $\mathbb{R}^d \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ .

On définit également la mesure de Lévy  $\nu$  de  $X$  : pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d*})$ ,

$$\nu(B) = E[\text{Card}(s \leq 1, \Delta X_s \in B)].$$

On note  $\mathcal{P}$  la tribu prévisible, c'est-à-dire la tribu sur  $\Omega \times \mathbb{R}^+$  engendrée par les processus continus à gauche. On dit aussi qu'une fonction  $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d*} \rightarrow \mathbb{R}$  est prévisible si elle est  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -mesurable.

Du fait de l'indépendance et de la stationnarité des accroissements, le compensateur de la mesure  $\mu$  est déterministe et égal à  $\nu(dx)ds$ . On rappelle que ceci signifie que pour toute fonction prévisible positive  $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$E\left[\sum_{0 < s \leq t} f(\omega, s, \Delta X_s)\right] = E\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} f(\omega, s, x) \nu(dx) ds\right].$$

On peut alors déduire de cette égalité et de la formule d'Itô le résultat suivant :

**Théorème 1.4 (Formule exponentielle, [8], Ch0.p8)** *Soit  $X$  un processus de Lévy et  $\nu$  sa mesure de Lévy. Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction borélienne vérifiant  $f(x) = x$  sur un voisinage de 0 et telle que  $\int_{\mathbb{R}^d} |1 - e^{f(x)}| \nu(dx) < +\infty$ . Alors pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$E\left[\exp\left(\sum_{0 < s \leq t} f(\Delta X_s)\right)\right] = \exp\left[-t \int_{\mathbb{R}^{d*}} (1 - e^{f(x)}) \nu(dx)\right].$$

Cette formule permet notamment d'obtenir la condition d'intégrabilité qui doit être vérifiée par la mesure de Lévy  $\nu$  :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |x|^2) \nu(dx) < +\infty.$$

En se basant en particulier sur le Théorème 1.3 et les propriétés des martingales de carré intégrable, on peut alors montrer le théorème de décomposition suivant :

**Théorème 1.5 ([52], Th2.1)** *Soit  $X$  un processus de Lévy et  $h$  une fonction à support dans  $[-1, 1]^d$  et valant  $x$  sur un voisinage de 0. Alors  $X$  se décompose en la somme de trois processus de Lévy indépendants :*

$$\begin{aligned} X_t^{(1)} &= cW_t + bt \\ X_t^{(2)} &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} h(x) (\mu^X(dx, ds) - \nu(dx)ds) \\ X_t^{(3)} &= \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s - h(\Delta X_s)) \end{aligned}$$

où  $b \in \mathbb{R}^d$ ,  $c$  est une matrice symétrique positive, et  $\nu$  est la mesure de Lévy de  $X$ .

Ce résultat s'énonce habituellement pour la fonction de troncation  $h(x) = x \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}$ . Cependant, certains résultats du Chapitre 2 nécessiteront l'utilisation d'une fonction continue. On suppose donc ici, et dans toute la suite, que la fonction  $h$  a été fixée continue.

En utilisant la formule exponentielle, on déduit de cette décomposition la formule de Lévy Khintchine :

**Théorème 1.6** *Soit  $X$  un processus de Lévy. Alors il existe une fonction  $\psi$  telle que pour tout  $t \geq 0$  et tout  $u \in \mathbb{R}^d$ ,  $E[e^{i\langle u, X_t \rangle}] = e^{-t\psi(u)}$ .*

*Avec les notations du Théorème précédent,*

$$\psi(u) = i \langle b, u \rangle + \frac{1}{2} {}^\top u c u + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u, x \rangle} - 1 - i \langle u, h(x) \rangle) \nu(dx)$$

*Le triplet  $(b, c, \nu)$  est appelé triplet caractéristique du processus de Lévy  $X$ .*

On reconnaît ici la forme générale de l'exposant caractéristique d'une distribution infiniment divisible. Il existe donc une bijection entre l'ensemble des lois infiniment divisibles et l'ensemble des lois des processus de Lévy.

Ainsi, le triplet  $(b, c, \nu)$  caractérise la loi d'un processus de Lévy. Dans tout ce travail, on donnera autant que possible les résultats en fonction de ce triplet. Pour finir ce paragraphe, on rappelle la caractérisation de la famille des processus de Lévy monotone en fonction du triplet  $(b, c, \nu)$  qui nous sera utile par la suite. On dit qu'un processus de Lévy à valeurs réelles est monotone si la fonction  $t \mapsto X_t(\omega)$  est soit croissante pour tout  $\omega \in \Omega$ , soit décroissante pour tout  $\omega \in \Omega$ .

**Proposition 1.7 ([52], Lemme 2.14)** *Soit  $X$  un processus de Lévy de caractéristiques  $(b, c, \nu)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  $X$  est monotone si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

$$\begin{aligned} c &= 0, \text{ supp}(\nu) \subseteq \mathbb{R}^{+*}, b - \int_{\mathbb{R}^*} h(x) \nu(dx) \geq 0. \\ c &= 0, \text{ supp}(\nu) \subseteq \mathbb{R}^{-*}, b - \int_{\mathbb{R}^*} h(x) \nu(dx) \leq 0. \end{aligned}$$

## 1.2 Description du marché financier

On considère dans ce travail un marché financier constitué de  $d$  actifs risqués modélisés par un processus stochastique  $S$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*d}$ . Chaque composante de  $S$  est de la forme

$$S^{(i)} = S_0^{(i)} e^{X^{(i)}}$$

où  $S_0^{(i)} > 0$  et  $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$  est un processus de Lévy à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  défini sur l'espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, P)$ .

On suppose qu'il existe également un actif non-risqué  $B$  dont la valeur à l'instant  $t$  est donnée par la fonction

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

où  $B_0 \geq 0$  et  $r \geq 0$  représente le taux d'intérêt, ici supposé constant.

Un investisseur partage alors à chaque instant son capital entre les différents actifs. Cette stratégie est représentée par un processus  $\Phi = (\eta, \phi)$  où  $\eta$  est la quantité investie sur  $B$  et  $\phi = (\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(d)})$  est la quantité investie sur les  $d$  actifs risqués.

On rappelle que si chaque composante  $\phi^{(i)}$  est intégrable par rapport à  $S^{(i)}$ , alors l'intégrale  $\phi \cdot S$  de  $\phi$  par rapport à  $S$  est donnée par

$$(\phi \cdot S)_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \phi_s^{(i)} dS_s^{(i)}.$$

On définit plus généralement l'intégrale vectorielle stochastique de la façon suivante :

**Définition 1.8 ([15], Déf. p.130)** On dit qu'un processus prévisible  $\phi$  est  $S$ -intégrable, et que  $\phi \cdot S = Y$ , si  $Y$  est une semimartingale telle que  $\phi \mathbf{1}_{|\phi| \leq n} \cdot S$  converge dans la topologie des semimartingales d'Emery vers  $Y$ .

De façon générale, si  $S$  est une martingale locale,  $\phi \cdot S$  n'est pas nécessairement une martingale locale (cf. [28]). On a cependant le résultat suivant, qui découle de Ansel, Stricker [3], Cor.3.5 :

**Proposition 1.9** Soit  $S$  une martingale locale et  $\phi$  un processus prévisible  $S$ -intégrable. Si il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\phi \cdot S \geq a$  presque sûrement, alors  $\phi \cdot S$  est une martingale locale.

On définit maintenant l'ensemble des stratégies admissibles relativement à notre modèle :

**Définition 1.10** Une stratégie admissible est un processus prévisible  $\Phi = (\eta, \phi)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  tel que  $\eta$  est  $B$ -intégrable,  $\phi$  est  $S$ -intégrable et pour lequel il existe un réel  $a \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(\phi \cdot S)_t \geq -a.$$

On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des stratégies admissibles.

La valeur à l'instant  $t$  du portefeuille associée à une stratégie  $\Phi \in \mathcal{A}$  est

$$V_t(\Phi) = V_0 + \eta_t B_t + \sum_{i=1}^d \phi_t^{(i)} S_t^{(i)}.$$

On dit qu'une stratégie est auto-financée si elle est admissible et pour tout  $t \geq 0$ ,

$$V_t(\Phi) = V_0(\Phi) + \int_0^t \eta_s dB_s + (\phi \cdot S)_t.$$

Une stratégie autofinancée est donc une stratégie pour laquelle il n'y a ni retrait, ni apport extérieur au portefeuille mais pour laquelle les variations de capital proviennent uniquement de l'évolution des prix des actifs.

L'actif non-risqué  $B$  joue le rôle de numéraire. Le gain d'une stratégie est donc mesuré par la valeur actualisée du portefeuille  $V_t^*(\Phi) = \frac{V_t(\Phi)}{B_t}$ . Plus généralement, on affectera d'une étoile toute les quantités actualisées, en particulier le prix actualisé de l'actif risqué  $S^* = \frac{S}{B}$ . Une application simple de la formule d'Itô donne alors le résultat suivant.

**Lemme 1.11 ([58], Lemma 3.1.3)** Soit  $\Phi$  une stratégie autofinancée. Alors

$$V_t^*(\Phi) = V_0^*(\Phi) + (\Phi \cdot S^*)_t.$$

Notons qu'il découle alors de la définition d'une stratégie admissible et de la Proposition 1.9, que si  $S^*$  est une martingale locale, alors  $V^*$  est également une martingale locale.

On considérera dans la suite le marché sur un intervalle de temps fixé et fini  $[0, T]$ .

**Définition 1.12** Une stratégie autofinancée  $\Phi$  constitue une opportunité d'arbitrage si

$$V_0^*(\Phi) = 0, P(V_T^*(\Phi) \geq 0) = 1, P(V_T^*(\Phi) > 0) > 0.$$

L'arbitrage modélise donc la possibilité de faire un profit sans prendre de risque, et on supposera par la suite qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage dans le marché. On utilisera également une condition légèrement plus forte :

**Définition 1.13** Une suite de stratégies admissibles  $(\Phi^n)_{n \geq 0}$  constitue un "Free Lunch with Vanishing Risk" (FLVR) s'il existe une variable aléatoire strictement positive bornée  $f$  telle que pour tout  $n$ ,

$$\int_0^T \phi_s^n dS_s^* \geq f - \frac{1}{n}$$

et vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \phi_s^n dS_s^* = f \text{ p.s.}$$

On dit qu'un marché est NFLVR s'il n'existe pas de telles opportunités.

Un marché NFLVR exclut donc la possibilité d'avoir une suite de stratégies pour laquelle le risque devient arbitrairement petit.

Un problème important sur le marché consiste en la détermination du prix et la réplication d'actifs conditionnels. On considère dans ce travail des options sur l'actif risqué  $S$  avec une échéance fixée finie  $T \geq 0$ . La valeur de l'actif conditionnel à l'instant  $T$  est alors donnée par une fonction de payoff  $g : D([0, T]) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie sur l'espace des fonctions càdlàg sur  $[0, T]$ . On rappelle en particulier les exemples suivants pour des options d'achat dans le cas unidimensionnel :

Options européennes :

$$g(S) = (S_T - K)^+, K \geq 0$$

Options asiatiques :

$$g(S) = \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_s ds - K \right)^+, K \geq 0$$

Options lookback :

$$g(S) = \left( \sup_{0 \leq s \leq T} S_s - K \right)^+, K \geq 0.$$

**Définition 1.14** Le modèle est dit complet si pour tout actif conditionnel dont la fonction de payoff  $g$  est bornée, il existe une stratégie admissible autofinancée  $\phi$  pour laquelle :

- i) il existe des constantes  $a$  et  $b$  telles que  $P(\forall t \leq T, a \leq V_t^*(\phi) \leq b) = 1$
- ii)  $g(S) = V_T^*(\phi)$  P.ps.

Notons que d'après le Lemme 1.11, on aura  $g(S) = V_T^*(\phi)$  si et seulement si il existe un réel  $x^*$  et un processus prévisible  $S$ -intégrable  $\phi$  tel que

$$\frac{g(S)}{B_T} = x^* + \int_0^T \phi_s dS_s^*. \quad (1.1)$$

Ainsi, la complétude d'un marché est liée à la possibilité d'obtenir des décompositions du type (1.1) pour les variables aléatoires bornées  $\mathcal{F}_T$ -mesurables.



### 1.3 Modèles de Lévy et mesures martingales équivalentes

Les notions d'arbitrage et de complétude d'un marché définies dans la section précédente peuvent s'exprimer en termes de mesures martingales équivalentes.

**Définition 1.15** *On appelle mesure martingale équivalente (MME) toute mesure  $Q$  équivalente à  $P$  sous laquelle  $S^*$  est une martingale. On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble de ces mesures.*

Dans le cadre des modèles de Lévy, un sous-ensemble intéressant de  $\mathcal{M}$  est constitué des mesures martingales qui préservent la propriété de Lévy.

**Définition 1.16** *On dit qu'une MME  $Q$  préserve la propriété de Lévy si  $X$  est encore un processus de Lévy sous  $Q$ . On note  $\mathcal{M}'$  l'ensemble de ces mesures.*

On cherche maintenant à caractériser l'ensemble des éléments de  $\mathcal{M}$  et de  $\mathcal{M}'$ . Pour cela, on commence par rappeler le théorème de Girsanov qui permet d'exprimer les caractéristiques de semimartingales  $(b^Q, c^Q, \nu^Q)$  de  $X$  sous la mesure  $Q$  en fonction des caractéristiques  $(b, c, \nu)$  sous  $P$ .

**Théorème 1.17** (cf [41], Th III.3.24) *Soit  $Q$  une mesure localement absolument continue par rapport à  $P$ . Il existe alors une fonction prévisible positive ou nulle  $Y$  et un processus prévisible  $\beta$  vérifiant  $Q$ -p.s et pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)(Y_t(x) - 1)| \nu(dx) < +\infty$$

$$\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \beta_s^i c^{ij} \beta_s^j ds < +\infty$$

et tels que

$$\begin{cases} b_t^{Q,(i)} = b^{(i)} + \sum_{j=1}^d c^{ij} \beta_t^j + \int_{\mathbb{R}^d} h^{(i)}(x)(Y_t(x) - 1) \nu(dx) \\ c_t^Q = c \\ \nu_t^Q(dx) = Y_t(x) \nu(dx). \end{cases} \quad (1.2)$$

Nous appellerons par la suite  $\beta$  et  $Y$  les paramètres de Girsanov du changement de mesure.

Ce résultat est vrai pour toute mesure absolument continue par rapport à  $P$ . On peut alors caractériser les éléments de  $\mathcal{M}$  et de  $\mathcal{M}'$  en fonction de leurs paramètres de Girsanov.

**Théorème 1.18** *Soit  $Q$  une mesure localement absolument continue par rapport à  $P$  de paramètres de Girsanov  $\beta$  et  $Y$ . Alors*

*$Q \in \mathcal{M}$  si et seulement si  $P$ -p.s et pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$Y_t(x) > 0 \text{ } (\nu - pp) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} (\sqrt{Y_t(x)} - 1)^2 \nu(dx) < +\infty,$$

$$\int_{x \geq 1} (e^x - 1) Y_t(x) \nu(dx) < +\infty,$$

$$b + \frac{1}{2} \text{diag}(c) + c\beta_t + \int_{\mathbb{R}^d} (e^x - 1)Y_t(x) - h(x)\nu(dx) = 0. \quad (1.3)$$

$Q \in \mathcal{M}'$  si de plus il existe  $\beta \in \mathbb{R}^d$  et une fonction borélienne  $Y$  strictement positive telle que  $P$ -p.s, pour tout  $t \geq 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\beta_t = \beta \text{ et } Y_t(x) = Y(x). \quad (1.4)$$

Parmi les conditions de ce théorème, la première garantit l'équivalence des mesures  $Q$  et  $P$  et la deuxième assure  $E_Q[e^{X_t}] < +\infty$ . On peut ensuite montrer par la formule d'Itô que (1.3) est vérifiée si et seulement si  $S$  est une martingale sous  $Q$ . De plus, la mesure  $Q$  préserve la propriété de Lévy si et seulement si les caractéristiques  $(b^Q, c^Q, \nu^Q)$  sont déterministes et indépendantes du temps. Par (1.2), ceci sera le cas si et seulement si (1.4) est vérifié.

Une première conséquence de ce résultat est la suivante :

**Proposition 1.19** (cf [42], Th 1.) *Soit  $X$  un processus de Lévy. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes pour le marché associé :*

- (i)  $\mathcal{M} \neq \emptyset$
- (ii)  $\mathcal{M}' \neq \emptyset$

Tout élément de  $\mathcal{M}'$  appartient bien sûr à  $\mathcal{M}$ . Pour montrer que (i) implique (ii), il suffit de remarquer qu'étant donnée une mesure martingale  $Q$  de paramètres de Girsanov  $(\beta, Y)$ , le couple  $(\beta_t(\omega), Y_t(\omega))$  vérifie les conditions du Théorème 1.18 pour presque tout  $\omega \in \Omega$  et pour tout  $t \geq 0$ . Ainsi, on obtient une mesure martingale qui préserve la propriété de Lévy en considérant la mesure associée à  $(\beta_t(\omega), Y_t(\omega))$  pour  $\omega$  et  $t$  fixés.

Du fait de la propriété de représentation des martingales pour les processus de Lévy, les paramètres de Girsanov  $(\beta, Y)$  déterminent entièrement le changement de mesure de  $P$  à  $Q \in \mathcal{M}$ . Ils permettent en particulier d'écrire explicitement sa densité :

**Proposition 1.20** (cf [41] Th III.5.19) *Soit  $Q \in \mathcal{M}$  et soit  $(Z_t = \frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t})_{t \geq 0}$  sa densité de Radon-Nikodym. Alors  $Z = \mathcal{E}(N)$  où*

$$N_t = (\beta \cdot X^{(c)})_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} (Y_s(x) - 1)(\mu^X - \nu(dx))ds$$

On peut maintenant caractériser les propriétés NFLVR et de complétude du marché par des conditions sur l'ensemble  $\mathcal{M}$ .

**Théorème 1.21** *Dans le cadre d'un modèle de Lévy exponentiel, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le marché financier associé est NFLVR.*
- (ii)  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ .

**Remarque 1.** Il s'agit du Théorème Fondamental du Calcul de Prix d'Options de Delbaen et Schachermayer (cf. [18],[19]). Ce résultat donne dans le cadre beaucoup plus général des semimartingales l'équivalence entre (i) et l'existence d'une mesure équivalente sous laquelle  $S$  est une sigma-martingale. Or, si  $X$  est un processus de Lévy,  $S = e^X$  est une sigma-martingale si et seulement si  $S$  est une martingale ce qui donne l'équivalence avec (ii).

**Remarque 2.** Dans le cadre des modèles unidimensionnels, il a été noté dans [42], [72] que ces propriétés sont vérifiées si et seulement si le processus de Lévy  $X$  n'est pas monotone. Ainsi, par le Lemme 1.7, la propriété NFLVR peut s'écrire en terme de conditions sur le triplet caractéristique de  $X$ . Un résultat similaire a été obtenu dans [47] pour le cas multidimensionnel mais dans le cadre de modèles avec contraintes.

On caractérise maintenant de même la complétude d'un marché financier :

**Théorème 1.22 ([47], Prop 3.12)** *On considère un modèle de Lévy exponentiel pour lequel le marché associé est NFLVR. Alors, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le marché financier associé est complet.*
- (ii)  *$\mathcal{M}$  est réduit à un point.*
- (iii)  *$\text{supp}(\nu)$  contient au plus  $k$  points, où  $k$  est la dimension du noyau de  $c$ , et  $\text{supp}(\nu) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d, c(e^x - 1) = 0\}$ .*

L'équivalence entre (i) et (ii) a par exemple été montrée dans [19] et l'équivalence entre (ii) et (iii) se montre à partir de (1.3).

## 1.4 Prix d'options et stratégies optimales

Dans un marché complet, le processus de prix  $S$  a la propriété de représentation prévisible relativement à l'unique mesure martingale équivalente  $Q$  ([76], Th1.17). Ceci signifie que pour toute variable aléatoire  $H$ ,  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et intégrable par rapport à  $Q$ , il existe un unique processus prévisible  $\hat{\phi}$  tel que

$$H = E_Q[H] + (\hat{\phi} \cdot S)_T$$

et pour lequel  $\hat{\phi} \cdot S$  est une  $Q$ -martingale. On associe alors à l'option de fonction de payoff  $H$  le prix  $E_Q[H]$  et  $\hat{\phi}$  est une stratégie admissible qui permet de répliquer la valeur  $H$  à l'instant  $T$ . Dans des cas simples, le prix d'une option peut être déterminé explicitement. On rappelle en particulier que pour une option d'achat européenne,

$$E_Q[(S_T - K)^+] = \Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + T(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) - T(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale standard.

Cependant, la plupart des modèles de Lévy sont incomplets et l'ensemble des prix admissibles  $\{E_Q[H], Q \in \mathcal{M}\}$  recouvre un intervalle de  $\mathbb{R}^+$ . Cet ensemble a plus particulièrement été étudié pour des fonctions de payoff qui ne dépendent que de la valeur finale :  $H = g(S_T)$ . Il a notamment été montré (cf [24],[42]) que pour une large classe de modèles de Lévy et de fonctions  $g$ ,

$$\{E_Q[g(S_T)], Q \in \mathcal{M}\} = ]e^{-rT}g(S_0), S_0[$$

et que les prix associés aux éléments de  $\mathcal{M}'$  sont denses dans cet ensemble. L'intervalle ici obtenu est l'intervalle de non-arbitrage : toute valeur en-dehors permet un arbitrage pour l'acheteur ou pour le vendeur.

D'autre part, une mesure martingale étant choisie, il est en général difficile de donner une forme explicite du prix  $E_Q[g(S)]$ . On peut toutefois obtenir des expressions sous forme intégrale par transformation de Fourier (cf. [11],[63],[61]). On rappelle ici un résultat de [61] valable pour tous les modèles de semimartingales et qui concerne les options dont le payoff ne dépend que de la valeur finale :

**Théorème 1.23 (cf [61], Th 3.5)** *On suppose que le prix d'un actif est modélisé par une semimartingale exponentielle :  $S = e^X$ . On considère une option de payoff  $g(X_T)$ . On suppose de plus qu'il existe deux intervalles  $I_1$  et  $I_2$  de  $\mathbb{R}$  tels que :*

$$i) \text{ Pour tout } R \in I_1, \int_{\mathbb{R}} e^{-Rx} g(x) dx < +\infty$$

$$ii) \text{ Pour tout } z \in I_2, E_Q[e^{zX_T}] < +\infty$$

$$iii) I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$$

Alors, pour tout  $R \in I_1 \cap I_2$ ,

$$E_Q[g(X_T)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} E_Q[e^{(R-iu)X_T}] \mathcal{F}_g(u + iR) du$$

$$\text{avec } \mathcal{F}_g(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} g(x) dx.$$

L'expression de la fonction caractéristique est donnée par les caractéristiques de  $X$  sous la mesure  $Q$ . En particulier, si  $X$  a pour caractéristiques  $(b, c, \nu)$  sous  $P$ , et si  $(\beta, Y)$  sont les paramètres de Girsanov du changement de mesure de  $P$  à  $Q \in \mathcal{M}'$ , on a  $E_Q[e^{zX_T}] = e^{-T\psi_Q(z)}$  avec

$$\psi_Q(z) = (b + c\beta)z + \frac{c}{2}z^2 + \int_{\mathbb{R}} ((e^{zx} - 1)Y(x) - zh(x))\nu(dx)$$

La transformée de Fourier de la fonction de payoff peut se calculer explicitement dans certains cas simples ([61], Section 3.4). En particulier, pour une option d'achat européenne, c'est-à-dire pour laquelle  $g(x) = (x - K)^+$ ,

$$\mathcal{F}_g(z) = \frac{K^{1+iz}}{iz(1+iz)}.$$

Lorsqu'un modèle est incomplet, il n'existe généralement pas de stratégies admissibles permettant de répliquer une option. On utilise cependant différents critères d'optimalité pour choisir une des stratégies appartenant à  $\mathcal{A}$ . Une possibilité consiste à chercher une stratégie qui maximise une certaine fonction d'utilité des gains.

**Définition 1.24** *On appelle fonction d'utilité une fonction  $u : ]\underline{x}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , strictement croissante, strictement concave et telle que*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \underline{x}} u'(x) = +\infty$$

où  $\underline{x} = \inf\{x, x \in \text{dom}(u)\} \in [-\infty, 0]$ .

Les fonctions les plus couramment employées sont  $u(x) = \ln(x)$ ,  $u(x) = \frac{x^p}{p}$  avec  $p < 1$  ou  $u(x) = 1 - e^{-x}$ . On définit finalement la stratégie optimale associée à la fonction d'utilité  $u$ .

**Définition 1.25** Une stratégie  $\hat{\phi} \in \mathcal{A}$  est *u-optimale* sur  $[0, T]$  si

$$E[u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_T)] = \sup_{\phi \in \mathcal{A}} E[u(x + (\phi \cdot S)_T)].$$

Une suite de stratégies  $(\hat{\phi}^{(n)})_{n \geq 1}$  est *asymptotiquement u-optimale* sur  $[0, T]$  si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[u(x + (\hat{\phi}^{(n)} \cdot S)_T)] = \sup_{\phi \in \mathcal{A}} E[u(x + (\phi \cdot S)_T)].$$

## Chapitre 2

# Propriétés de continuité des prix d'options

### 2.1 Introduction

Les modèles mathématiques pour les actifs financiers dépendent d'un certain nombre de paramètres qui doivent être estimés. Par exemple, les paramètres d'un modèle de Black-Scholes sont le drift et la volatilité ; il y a quatre paramètres pour un modèle CGMY et cinq pour un modèle hyperbolique généralisé. Ces différents paramètres sont généralement calibrés à partir de données du marché, et on les suppose constants sur un certain intervalle de temps. Il est cependant légitime de penser qu'ils varient en fonction de l'information croissante dont disposent les acteurs du marché et il est donc intéressant d'étudier l'influence d'une petite variation des paramètres sur les prix d'options. Les différents paramètres n'auront pas la même importance dans ce type de problème et certains ne devraient jouer aucun rôle. En effet, le drift n'apparaît par exemple pas dans la formule de Black-Scholes.

On s'intéresse ici à une suite de modèles de Lévy exponentiels qui converge en un sens à préciser vers un modèle limite et on cherche des conditions de convergence sur les caractéristiques du modèle qui entraîneront la convergence du prix des options. Un problème de ce type a d'abord été considéré dans [37], où on étudie en particulier la convergence de la suite de prix d'options associés à des modèles discrets convergeant vers un modèle de Black-Scholes. La question du lien entre la convergence de la suite de processus de prix sous les mesures initiales et leur convergence sous les mesures martingales a également été étudiée dans [74] pour une suite de modèles de Cox-Ross-Rubinstein convergeant vers un modèle de Black-Scholes.

On introduit le formalisme suivant : on considère une suite de bases stochastiques  $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{F}^n, P^n)$ , où  $\mathbb{F}^n$  est une filtration continue à droite et complétée telle que  $\mathcal{F}^n = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t^n$ . On considère sur chaque espace un processus de Lévy  $X^n$  à valeurs réelles de caractéristiques  $(b_n, c_n, \nu_n)$  et on y associe un modèle de Lévy exponentiel : l'actif risqué est modélisé par le processus

$$S_t^n = S_0^n \exp\{X_t^n\} \quad (2.1)$$

et l'actif non-risqué par

$$B_t^n = B_0^n \exp\{r_n t\}.$$

On considère également une option d'échéance fixée  $T$ . On suppose que la fonction de payoff  $g$  qui lui est associée est continue sur l'espace de Skorokhod  $\mathbb{D}([0, T])$  et qu'il existe des constantes positives  $A$  et  $B$  telles que

$$g(S) \leq A \sup_{0 \leq s \leq T} |S_s| + B. \quad (2.2)$$

Cette condition est en particulier vérifiée pour les options d'achat européennes dont la fonction de payoff vaut  $g(S) = (S_T - K)^+$ , pour une option asiatique donnée par  $g(S) = (S_T - \frac{1}{T} \int_0^T S_s ds)^+$ , pour une option lookback qui correspond au cas  $g(S) = (\sup_{0 \leq s \leq T} S_s - K)^+$  ainsi que pour les options de vente correspondantes.

On suppose également que pour tout  $n \geq 1$ , l'ensemble des mesures martingales équivalentes (MME) associées au modèle est non-vide. On rappelle que par le Théorème 1.21, ceci est équivalent à supposer que les processus  $X^n$  ne sont pas monotones. De plus, d'après la Proposition 1.19, l'ensemble des MME qui préservent la propriété de Lévy est également non-vide et on choisit une de ces mesures que l'on note  $Q^n$ . On note alors  $(\beta^n, Y^n)$  les paramètres de Girsanov de ce changement de mesure et on rappelle qu'ils vérifient les conditions énoncées dans le Théorème 1.18. On ne fait pour l'instant aucune hypothèse sur  $Q^n$  mais on supposera dans la section 2.3 que ces mesures sont les solutions de problèmes de minimisation sur l'ensemble des mesures martingales équivalentes.  $Q^n$  étant choisie, on associe à l'option le prix

$$\mathbb{C}_T^n = E_{Q^n}[g(\tilde{S}^n)]$$

où  $\tilde{S}^n = S^n/B^n$  représente le prix actualisé de l'actif risqué. Dans la suite de ce chapitre, on supposera que  $r_n = 0$  et on considèrera donc  $S^n$  plutôt que  $\tilde{S}^n$ . Le cas général s'obtient en remplaçant le drift du processus de Lévy  $X^n$  par  $b_n - r_n$ .

On suppose que notre suite de modèles tend dans un sens à préciser vers un autre modèle de Lévy exponentiel. Celui-ci est défini par un processus de Lévy  $X$  de caractéristiques  $(b, c, \nu)$  défini sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ . On note alors comme précédemment les deux actifs

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{X_t} \\ B_t &= B_0 e^{rt} \end{aligned}$$

où  $S_0, B_0$  sont les valeurs initiales et  $r \geq 0$  est le taux d'intérêt. Comme pour les modèles de la suite, on suppose dans la suite que  $r = 0$ .

Le chapitre s'organise de la façon suivante. On donne d'abord des conditions de convergence sur les paramètres  $(b_n, c_n, \nu_n, \beta_n, Y_n)$  qui entraînent la convergence de la suite de prix d'options associés (section 2.2). On applique ensuite ces résultats lorsque les mesures martingales sont choisies selon différents critères d'optimisation (section 2.3). On étudie finalement l'influence du choix de la mesure sur le prix (section 2.4).

## 2.2 Continuité des prix d'options

On suppose dans un premier temps que le modèle limite admet une mesure  $Q \in \mathcal{M}'$ . On note  $(\beta, Y)$  ses paramètres de Girsanov qui vérifient les conditions du Théorème 1.18. On cherche alors à déterminer des conditions sur les caractéristiques et les paramètres de Girsanov sous lesquelles la suite de prix converge vers le prix dans le modèle limite.

**Théorème 2.1** *On suppose que la fonction de payoff  $g$  vérifie (2.2). On suppose de plus que*

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_0^n = S_0$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) Y^n(x) \nu_n(dx) = c + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) Y(x) \nu(dx)$
3. *Pour toute fonction continue bornée  $f$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^*} (e^x - 1) f(x) Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^*} (e^x - 1) f(x) Y(x) \nu(dx)$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = \mathbb{C}_T \quad (2.3)$$

La preuve de ce résultat se fait en deux temps. On utilise d'abord la caractérisation de la convergence en loi de processus de Lévy en termes de caractéristiques donnée dans le Th VII.2.9 de [41] pour montrer que

$$\mathcal{L}(S^n | Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(S | Q).$$

Il reste alors à vérifier que la famille  $(\sup_{s \leq T} S_s^n)_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable. Ceci s'obtient grâce à la factorisation de Wiener-Hopf pour les processus de Lévy.

Les hypothèses du Théorème 2.1 combinent des conditions sur les caractéristiques des processus sous les mesures initiales et sur les paramètres de Girsanov des changements de mesure. Il peut également être intéressant de supposer que

$$\mathcal{L}(X^n | P^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X | P) \quad (2.4)$$

et de déterminer sous quelles conditions sur les changements de mesure cette convergence se transmet sous les mesures martingales. Les conditions générales pour un tel résultat sont basées sur la convergence en loi du couple

$$\mathcal{L}((S^n, Z^n) | P^n) \longrightarrow \mathcal{L}((S, Z) | P).$$

Cependant, dans le cas des processus de Lévy, on peut donner des conditions simples en termes de caractéristiques. On introduit pour cela les conditions suivantes : on suppose que les paramètres de Girsanov  $(\beta_n, Y_n)$  associés aux changements de mesure de  $P^n$  à  $Q^n$  vérifient sur un voisinage de 0 :

$$Y^n(x) = 1 + \beta_n x + x \epsilon_n(x) \quad (2.5)$$

avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_n(x) = 0$ . On suppose de plus qu'il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $Y$  une fonction borélienne positive vérifiant

$$Y(x) = 1 + \beta x + x \epsilon(x) \text{ et } \int_{|x| \geq 1} Y(x) \nu(dx) < +\infty \quad (2.6)$$

tels que  $\epsilon_n$  converge uniformément vers  $\epsilon$  sur un voisinage de 0. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 2.2** *On suppose que (2.4), (2.5) et (2.6) sont vérifiées. On suppose de plus que*



- j)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \beta$   
 jj) Pour tout  $\eta > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq \eta} Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{|x| \geq \eta} Y(x) \nu(dx).$$

Alors, pour toute fonction de payoff continue bornée  $g$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{P^*}[g(S)]$$

où  $P^*$  est absolument continue par rapport à  $P$  et donnée par les paramètres de Girsanov  $(\beta, Y)$ . De plus,  $P^*$  est une mesure martingale équivalente pour  $S$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :  $Y > 0$   $\nu$ -p.p et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} e^x Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{x \geq 1} e^x Y(x) \nu(dx).$$

Sous ces conditions supplémentaires, la convergence des prix a lieu pour toute fonction de payoff qui vérifie (2.2).

On donne d'abord la preuve du Théorème 2.1. Pour cela, on commence par montrer que la suite de processus de Lévy  $(X^n)_{n \geq 1}$  converge en loi sous les mesures martingales.

**Lemme 2.3** Sous les hypothèses du Théorème 2.1,

$$\mathcal{L}(X^n|Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X|Q). \quad (2.7)$$

*Preuve* D'après le Théorème VII.2.9 dans [41], la convergence en loi (2.7) est équivalente aux trois conditions suivantes sur les caractéristiques :

- i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{Q^n} = b^Q$
- ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c^{Q^n} + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) \nu^{Q^n}(dx) = c + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) \nu^Q(dx)$
- iii) Pour toute fonction continue bornée  $f$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^*} f(x) \nu^{Q^n}(dx) = \int_{\mathbb{R}^*} f(x) \nu^Q(dx)$$

On rappelle que par le théorème de Girsanov, les caractéristiques de  $X^n$  sous  $Q^n$  sont

$$\begin{cases} b^{Q^n} = b_n + \beta^n c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h(x)(Y^n(x) - 1) \nu_n(dx) \\ c^{Q^n} = c_n \\ \nu^{Q^n}(dx) = Y^n(x) \nu_n(dx) \end{cases} \quad (2.8)$$

et que puisque  $Q^n$  est une mesure martingale,

$$b^{Q^n} = -\frac{1}{2} c_n - \int_{\mathbb{R}^*} [(e^x - 1 - h(x)) Y^n(x)] \nu_n(dx). \quad (2.9)$$

Des égalités semblables sont vérifiées pour les caractéristiques de  $X$  sous  $Q$  :

$$\begin{cases} b^Q = -\frac{c}{2} - \int_{\mathbb{R}^*} [(e^x - 1 - h(x)) Y(x)] \nu(dx) \\ c^Q = c \\ \nu^Q(dx) = Y(x) \nu(dx). \end{cases}$$

La condition ii) coïncide alors avec la condition 2. du Théorème 2.1 et la condition iii) se déduit de 3. Il reste donc à vérifier i). Par (2.9),

$$b^{Q^n} = -\frac{1}{2}[c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) Y^n(x) \nu_n(dx)] - \int_{\mathbb{R}^*} [e^x - 1 - h(x) - \frac{h^2(x)}{2}] Y^n(x) \nu_n(dx).$$

Les conditions 2. et 3. appliquée à la fonction  $f(x) = [e^x - 1 - h(x) - \frac{h^2(x)}{2}]/(e^x - 1)$  impliquent alors que les deux termes à droite de l'égalité convergent et que i) est vérifiée. Ainsi, par le Théorème VII.2.9, (2.7) est vérifiée.  $\square$

On cherche maintenant à montrer l'uniforme intégrabilité de la famille  $(\sup_{s \leq T} S_s^n)_{n \geq 1}$ . Celle-ci se déduit de la factorisation de Wiener-Hopf pour les processus de Lévy. On commence donc par énoncer une version de ce résultat :

**Théorème 2.4 (Factorisation de Wiener-Hopf)** *Soit  $L$  un processus de Lévy et  $\tau$  un temps exponentiel indépendant de  $L$ . Alors, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,*

$$E[e^{iuL\tau}] = E[e^{iu \sup_{0 \leq s \leq \tau} L_s}] E[e^{iu \inf_{0 \leq s \leq \tau} L_s}].$$

Cette décomposition peut s'étendre à l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C} : E[|e^{zL_1}|] < +\infty\}$  (cf. [78],[57]). On peut maintenant montrer le lemme suivant :

**Lemme 2.5** *Supposons que  $X^n$  et  $X$  sont des processus de Lévy sous des mesures martingales  $Q^n$  et  $Q$  et que*

$$\mathcal{L}(X^n|Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X|Q).$$

*Alors, pour toute variable aléatoire  $\tau$  indépendante de  $X^n$  et  $X$  de loi exponentielle  $\mu_q$  de paramètre  $q$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{Q^n \times \mu_q}(\sup_{0 \leq t \leq \tau} e^{X_t^n}) = E_{Q \times \mu_q}(\sup_{0 \leq t \leq \tau} e^{X_t}). \quad (2.10)$$

*Preuve* Soit  $\tau$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $q$ , notée  $\mu_q$  et donnée sur un espace  $(E, \mathcal{E})$ . On considère un élargissement de l'espace probabilisé initial  $(\tilde{\Omega}^n, \tilde{\mathcal{F}}^n, \tilde{\mathbb{P}}^n, \tilde{Q}^n)$  où  $\tilde{\Omega}^n = \Omega^n \times E$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}^n = \mathcal{F}^n \times \mathcal{E}$ ,  $\tilde{\mathbb{P}}^n = (\tilde{\mathcal{F}}_t^n)_{t \geq 0}$  avec  $\tilde{\mathcal{F}}_t^n = \mathcal{F}_t^n \otimes \mathcal{E}$  et  $\tilde{Q}^n = Q^n \times \mu_q$ . On définit de même un élargissement  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{Q})$  de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, Q)$ . Les processus  $X^n$  et  $X$  restent des processus de Lévy avec les mêmes caractéristiques sous cet élargissement. Comme  $Q^n$  est une mesure martingale, et donc  $E_{Q^n}[e^{X_1^n}] = E_{Q^n}[e^{X_0^n}] = 1$ , la factorisation de Wiener-Hopf s'étend à  $u = -i$  de sorte que

$$E_{\tilde{Q}^n}[e^{\sup_{0 \leq t \leq \tau} X_t^n}] = \frac{1}{E_{\tilde{Q}^n}[e^{\inf_{0 \leq t \leq \tau} X_t^n}]}. \quad (2.11)$$

D'autre part, les processus  $X^n$  et  $X$  sont des processus de Lévy et n'ont donc pas d'instant fixe de discontinuité, et  $\tau$  est une variable aléatoire indépendante de ces processus, donc

$$\mathcal{L}(\inf_{0 \leq t \leq \tau} X_t^n | \tilde{Q}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\inf_{0 \leq t \leq \tau} X_t | \tilde{Q}). \quad (2.12)$$

Comme  $e^{\inf_{0 \leq t \leq \tau} X_t^n} \leq e^{X_0^n} \leq 1$ , on déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{\tilde{Q}^n}[e^{\inf_{0 \leq t \leq \tau} X_t^n}] = E_{\tilde{Q}}[e^{\inf_{0 \leq t \leq \tau} X_t}]. \quad (2.13)$$

Finalement, on déduit (2.10) de (2.11) et (2.13).  $\square$

**Lemme 2.6** *On suppose que (2.10) est vérifiée. Alors pour tout  $T \geq 0$ , la famille  $(\sup_{0 \leq s \leq T} S_s^n)_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable.*

*Preuve* On rappelle que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} S_t^n = S_0^n e^{\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^n}$$

Pour un  $q > 0$  fixé, on a

$$e^{\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^n} \leq e^{qT} \int_T^{+\infty} q e^{-qu} e^{\sup_{0 \leq t \leq u} X_t^n} du \leq e^{qT} \int_0^{+\infty} q e^{-qu} e^{\sup_{0 \leq t \leq u} X_t^n} du$$

de sorte que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} S_t^n \leq e^{qT} E_{\mu_q}(\sup_{0 \leq t \leq \tau} S_t^n). \quad (2.14)$$

L'égalité (2.10) entraîne par le théorème de Fubini l'uniforme intégrabilité de la famille de variables aléatoires  $(E_{\mu_q}(\sup_{0 \leq t \leq \tau} S_t^n))_{n \geq 1}$ . On déduit alors de (2.14) l'uniforme intégrabilité de la famille  $(\sup_{0 \leq t \leq T} S_t^n)_{n \geq 1}$ .  $\square$

Ces différents lemmes nous permettent maintenant d'obtenir le Théorème 2.1.

*Preuve du Théorème 2.1* Par le Lemme 2.5 et la condition 1. du Théorème 2.1, nous avons

$$\mathcal{L}(S^n | Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(S | Q)$$

et comme la fonctionnelle  $g$  est continue sur  $\mathbb{D}([0, T])$ , on a également

$$\mathcal{L}(g(S^n) | Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(g(S) | Q).$$

On rappelle de plus que par hypothèse, il existe  $A, B \geq 0$  tels que  $g(S) \leq A \sup_{0 \leq s \leq T} S_s + B$ . Or, d'après le Lemme 2.6, la famille  $(\sup_{0 \leq s \leq T} S_s^n)_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable. On en déduit donc la convergence des prix :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{Q^n}[g(S^n)] = E_Q[g(S)] \quad \square$$

On cherche maintenant à montrer le Théorème 2.2.

*Preuve du Théorème 2.2* On commence par noter que par (2.6), on a

$$\int_{\mathbb{R}^*} (\sqrt{Y(x)} - 1)^2 \nu(dx) < +\infty.$$

Ainsi, la martingale

$$N_t = \beta X_t^{(c)} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (Y(x) - 1)(\mu^X - \nu(dx)) ds$$

est bien définie. Le processus  $Z^* = \mathcal{E}(N)$  est alors une martingale positive et définit donc la densité d'une mesure  $P^*$  absolument continue par rapport à  $P$  dont les paramètres de Girsanov sont  $(\beta, Y)$ . On cherche maintenant à vérifier les conditions i), ii) et iii) introduites dans la démonstration du Lemme 2.1. On écrit pour cela

$$\begin{aligned} b^{Q^n} = & b_n + \beta(c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) \nu_n(dx)) + \int_{\mathbb{R}^*} h(x)[Y(x) - 1 - \beta h(x)] \nu_n(dx) \\ & + c_n(\beta^n - \beta) + \int_{\mathbb{R}^*} h(x)(Y^n(x) - Y(x)) \nu_n(dx). \end{aligned}$$

La condition (2.4) entraîne la convergence des trois premiers termes de la somme. De plus, on déduit de (2.5) et (2.6) qu'il existe une suite  $(C_n)_{n \geq 1}$  tendant vers 0 telle que

$$h(x)|Y^n(x) - Y(x)| \leq (|\beta_n - \beta| + C_n)h^2(x).$$

Ainsi, j) entraîne la convergence vers 0 des deux derniers termes de la somme et on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{Q^n} = b + c\beta + \int_{\mathbb{R}^*} h(x)(Y(x) - 1)\nu(dx).$$

On obtient de même ii) en écrivant :

$$\begin{aligned} c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x)Y^n(x)\nu_n(dx) &= c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x)\nu_n(dx) + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x)(Y^n(x) - Y(x))\nu_n(dx) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x)(Y(x) - 1)\nu_n(dx) \end{aligned}$$

et iii) en écrivant pour toute fonction bornée  $f$  qui vérifie  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^*} f(x)Y^n(x)\nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^*} f(x)(Y^n(x) - Y(x))\nu_n(dx) + \int_{\mathbb{R}^*} f(x)Y(x)\nu_n(dx).$$

Ainsi, i), ii) et iii) sont vérifiées et donc

$$\mathcal{L}(X^n|Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X|P^*).$$

Comme  $g$  est continue et bornée sur  $\mathbb{D}([0, T])$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_0^n = S_0$ , on en déduit la première partie du théorème.

D'autre part,  $P^*$  sera une mesure martingale équivalente pour  $S$  si et seulement si on a  $Y > 0$   $\nu$ -p.p et

$$b + \frac{c}{2} + c\beta + \int_{\mathbb{R}^*} (e^x - 1)Y(x) - h(x)\nu(dx) = 0.$$

Par la formule de Girsanov pour  $b^{P^*}$ , cette dernière égalité est équivalente à

$$b^{P^*} = -\frac{c}{2} - \int_{\mathbb{R}^*} (e^x - 1 - h(x))Y(x)\nu(dx). \quad (2.15)$$

Or, comme  $b^{P^*} = \lim_{n \rightarrow +\infty} b^{Q^n}$ , on a

$$\begin{aligned} b^{P^*} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{c_n}{2} - \int_{x < 1} (e^x - 1 - h(x))Y^n(x)\nu_n(dx) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} (e^x - 1)Y^n(x)\nu_n(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}(c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x)\nu_n(dx)) - \int_{x < 1} (e^x - 1 - h(x) - \frac{h^2(x)}{2})Y^n(x)\nu_n(dx) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{|x| < 1} h^2(x)(Y^n(x) - 1)\nu_n(dx) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} (e^x - 1)Y^n(x)\nu_n(dx). \end{aligned}$$

On déduit alors de (2.4) et jj) que

$$b^{P^*} = -\frac{c}{2} - \int_{x < 1} (e^x - 1 - h(x))Y(x)\nu(dx) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} (e^x - 1)Y^n(x)\nu_n(dx).$$

Ainsi, on aura (2.15) si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} (e^x - 1) Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{x \geq 1} (e^x - 1) Y(x) \nu(dx)$$

Dans ce cas, les conditions du Théorème 2.1 sont satisfaites et la convergence des prix est assurée.  $\square$

### 2.3 Application au cas de mesures $f$ -minimales

On cherche maintenant à appliquer ces résultats lorsque les mesures martingales  $Q^n$  sont choisies selon des critères d'optimisation sur l'ensemble des mesures martingales équivalentes. On s'intéresse généralement aux mesures qui réalisent  $\min_{Q \in \mathcal{M}} E[f(\frac{dQ}{dP})]$ , où  $f$  est une fonction strictement convexe. L'intérêt de telles mesures minimales réside notamment dans leur lien avec des problèmes d'optimisation de stratégies. Nous étudierons plus précisément ces questions dans le chapitre suivant et nous nous limitons ici à quelques choix classiques de fonctions. On considère en particulier le cas de l'entropie relative, correspondant à la fonction  $f(x) = x \ln(x)$  et étudié dans [32], [56],[29],[38], le cas des fonctions puissances  $f(x) = x^q, q > 1$  ou  $q < 0$  étudiées dans [43] et  $f(x) = -x^q, 0 < q < 1$  ([16]) ainsi que la divergence logarithmique donnée par  $f(x) = -\ln(x)$  ([49]). Pour chacune de ces fonctions, des conditions d'existence de la mesure minimale ainsi que ses paramètres de Girsanov sont connus. Il a en particulier été noté que les mesures minimales associées préservent la propriété de Lévy. Ainsi, les résultats de la section précédente peuvent s'appliquer. On peut également remarquer que toutes ces fonctions ont une dérivée seconde de la forme  $f''(x) = ax^\gamma, a > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ . Plus précisément, si  $f''(x) = ax^\gamma$ , il existe  $p, q \in \mathbb{R}$  tels que

$$f(x) = \begin{cases} ax \ln(x) + px + q & \text{si } \gamma = -1 \\ -a \ln(x) + px + q & \text{si } \gamma = -2 \\ \frac{a}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x^{\gamma+2} + px + q & \text{si } \gamma \neq -1, -2. \end{cases}$$

L'étude qui suit se fait en fonction des valeurs du paramètre  $\gamma$ .

#### 2.3.1 Mesures minimisant l'entropie relative ( $\gamma = -1$ )

On commence par rappeler une condition nécessaire et suffisante d'existence de la mesure d'entropie minimale ainsi qu'une expression explicite de ses paramètres de Girsanov. Il a d'abord été montré dans [32] qu'il s'agit d'une condition suffisante, puis dans [38] que la condition est nécessaire.

**Proposition 2.7** *On suppose que  $f(x) = x \ln(x)$ . Une mesure  $f$ -minimale existe si et seulement si il existe  $\beta^* \in \mathbb{R}$  tel que*

$$\begin{aligned} \int_{|y| \geq 1} (e^y - 1) e^{\beta^*(e^y - 1)} \nu(dy) &< +\infty \\ b + \frac{c}{2} + c\beta^* + \int_{\mathbb{R}^*} ((e^y - 1) e^{\beta^*(e^y - 1)} - h(y)) \nu(dy) &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Les paramètres de Girsanov de la mesure minimale sont alors  $\beta^*$  et  $Y(y) = e^{\beta^*(e^y - 1)}$ .

Il a également été montré que cette mesure peut être obtenue par une transformation d'Esscher : si on considère l'écriture de  $S$  sous la forme d'une exponentielle de Doléans-Dade,  $S = \mathcal{E}(\hat{X})$ , on rappelle (cf [46] Lemme 2.7.2 par exemple) que l'exposant caractéristique du processus  $\hat{X}$  est

$$\hat{\psi}(u) = (b + \frac{c}{2})u + \frac{c}{2}u^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x))\nu(dx). \quad (2.17)$$

On introduit alors l'ensemble

$$D = \{u \in \mathbb{R} : E_P(e^{u\hat{X}_1}) < +\infty\}$$

et on considère la mesure d'Esscher  $P^u$  associée à  $\hat{X}$  et  $u \in D$  :

$$\frac{dP_t^u}{dP_t} = \frac{e^{u\hat{X}_t}}{E_P(e^{u\hat{X}_t})}.$$

La mesure  $P^u$  sera alors une mesure martingale si et seulement si le paramètre  $u$  est égal à  $\theta$ , où  $\theta$  est la solution de l'équation

$$b + \frac{c}{2} + c\theta + \int_{\mathbb{R}} ((e^x - 1)e^{\theta(e^x-1)} - h(x))\nu(dx) = 0, \quad (2.18)$$

c'est-à-dire  $\hat{\psi}'(\theta) = 0$ . On retrouve donc la condition (2.16) énoncée dans la Proposition 2.7.

On suppose ici que chaque modèle de la suite considérée admet une mesure d'entropie relative minimale. Ceci revient donc à supposer que pour tout  $n \geq 1$ , l'équation

$$b_n + \frac{c_n}{2} + cu \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)e^{u(e^x-1)} - h(x)\nu_n(dx) = 0 \quad (2.19)$$

admet une solution  $\theta_n$ .

On cherche à obtenir des conditions de convergence sur les caractéristiques qui entraînent d'une part l'existence d'une mesure minimale pour le modèle limite et d'autre part, la convergence des prix. Pour cela, on commence par introduire l'ensemble

$$U = \{u \in \mathbb{R} : \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{x>1} e^{u(e^x-1)}\nu_n(dx) < +\infty\}. \quad (2.20)$$

$U$  est donc le sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  sur lequel ces intégrales sont uniformément bornées pour de grandes valeurs de  $n$ . Il est de la forme  $] -\infty, \alpha[$  ou  $] -\infty, \alpha]$  où  $\alpha = \sup\{u : u \in U\}$ . Notons en particulier que  $\alpha \geq 0$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 2.8** *Soit  $g$  une fonction de payoff qui vérifie (2.2). On suppose de plus que :*

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_0^n = S_0$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x)\nu_n(dx) = c + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x)\nu(dx)$
4. Pour toute fonction continue bornée  $f$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^*} f(x)\nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^*} f(x)\nu(dx).$$

Alors, si  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) \geq 0$ , il existe une mesure martingale équivalente d'entropie minimale pour le modèle limite. De plus, si  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) > 0$ , nous avons la convergence (2.3) pour les prix et si  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) = 0$ , (2.3) est vrai au-moins pour une sous-suite.

Si  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) < 0$ , l'existence d'une mesure martingale minimale n'est pas garantie, mais si  $g$  est bornée, nous avons

$$\lim_{n' \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^{n'} = E_{P^*}[g(S)] \quad (2.21)$$

où  $n'$  est une sous-suite et  $P^*$  est une mesure équivalente à  $P$  qui n'est pas une mesure martingale et dont les paramètres de Girsanov sont  $(\alpha, \exp(\alpha(e^x - 1)))$ .

**Remarque.** Dans le cas  $\lim_{u \rightarrow \alpha} \hat{\psi}'(u) < 0$ , la mesure d'entropie minimale pour le modèle limite peut ou peut ne pas exister (cf. Exemples 2.1 et 2.2) et même si cette mesure existe, la limite pour la suite des prix d'options n'est pas  $\mathbb{C}_T$  en général (cf Exemple 2.1). De plus, on peut montrer par la factorisation de Wiener-Hopf que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{Q^n}[\sup_{0 \leq t \leq T} S_t^n] \neq E_{P^*}[\sup_{0 \leq s \leq T} S_t]$$

car  $E_{P^*}[S_T] \neq 1$ . Ainsi, la famille de variables aléatoires  $(\sup_{0 \leq t \leq T} S_t^n)_{n \geq 1}$  n'est pas uniformément intégrable et on ne peut généralement pas étendre l'égalité (2.21) à des fonctions de payoff non bornées. Cependant, il est possible d'obtenir une expression explicite de la limite dans certains cas simples. On a par exemple pour une option de type Call Européen,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{Q^n}(S_T^n - K)^+ = E_{P^*}(S_T - K)^+ + 1 - E_{P^*}[S_T].$$

Pour montrer le Théorème 2.8, on cherche à vérifier les conditions d'application du Théorème 2.2. Le point central consiste à déterminer les conditions sous lesquelles la suite  $\theta_n$  converge vers la solution de l'équation pour le modèle limite. Pour cela, on introduit pour chaque  $n \geq 1$  l'ensemble

$$D_n = \{u \in \mathbb{R} : \int_{x>1} e^{u(e^x-1)} \nu_n(dx) < +\infty\}$$

sur lequel est défini l'exposant caractéristique  $\hat{\psi}_n$  de  $\hat{X}^n$ . On rappelle que pour tout  $u \in D_n$ ,

$$\hat{\psi}_n(u) = (b_n + \frac{c_n}{2})u + \frac{c_n}{2}u^2 + \int_{\mathbb{R}^*} ((e^x - 1)e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x)) \nu_n(dx).$$

On considère également l'ensemble

$$D = \{u \in \mathbb{R} : \int_{x>1} e^{u(e^x-1)} \nu(dx) < +\infty\}$$

sur lequel est défini la fonction  $\hat{\psi}$  introduite en (2.17). On peut par exemple noter que  $\mathbb{R}^-$  est inclus dans  $D$  et  $D_n$ ,  $n \geq 1$ . Avant de s'intéresser à la convergence des fonctions  $\hat{\psi}^n$ , on donne une caractérisation des processus de Lévy monotones par le comportement asymptotique de  $\hat{\psi}$ .

**Lemme 2.9**  *$X$  est un processus de Lévy monotone si et seulement si*

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{\psi}'(u) \geq 0 \text{ ou } \lim_{u \rightarrow +\infty} \hat{\psi}'(u) \leq 0. \quad (2.22)$$

**Remarque.** On rappelle que chaque modèle associé à un processus de Lévy  $X^n$  admet une mesure martingale équivalente et n'est donc pas monotone d'après le Théorème 1.21. Ainsi, on a en particulier pour tout  $n \geq 1$ ,  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{\psi}'_n(u) \leq 0$ . Cette partie du Lemme 2.22 qui nous servira par la suite a par exemple été montré dans [38], Lemme 1.

*Preuve* On rappelle que

$$\hat{\psi}'(u) = b + \frac{c}{2} + cu + \int_{\mathbb{R}^*} (e^x - 1)e^{u(e^x - 1)} - h(x)\nu(dx).$$

On voit alors que si  $c \neq 0$  ou  $\nu(\mathbb{R}^-) \neq 0$ , on a  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{\psi}'(u) = -\infty$ . De plus, on a dans les autres cas  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{\psi}'(u) = b - \int_{\mathbb{R}^+} h(x)\nu(dx)$ . Ainsi,  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{\psi}'(u) \geq 0$  si et seulement si

$$c = 0, \nu(\mathbb{R}^-) = 0 \text{ et } b - \int_{\mathbb{R}} h(x)\nu(dx) \geq 0 \quad (2.23)$$

et ces conditions sont vérifiées si et seulement si les trajectoires de  $X$  sont croissantes. On obtient de même que  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \hat{\psi}'(u) \leq 0$  si et seulement si

$$c = 0, \nu(\mathbb{R}^+) = 0 \text{ et } b - \int_{\mathbb{R}} h(x)\nu(dx) \leq 0 \quad (2.24)$$

ce qui équivaut à la décroissance des trajectoires de  $X$ .  $\square$

On s'intéresse maintenant à la convergence des fonctions  $\hat{\psi}^n$ . Notons que sur l'ensemble  $\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} D_k$ , les fonctions  $\hat{\psi}^n$  sont définies pour  $n$  suffisamment grand, et on peut donc étudier leur limite. De plus, l'ensemble  $U$  défini en (2.20) vérifie

$$U \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k \geq n} D_k.$$

On énonce maintenant un premier résultat de convergence :

**Lemme 2.10** *Sous les hypothèses du Théorème 2.8, les fonctions  $\hat{\psi}^n$  et  $\hat{\psi}$  appartiennent à  $\mathcal{C}^\infty(\overset{\circ}{D}^n)$  et  $\mathcal{C}^\infty(\overset{\circ}{D})$ . De plus,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\psi}'_n(u) = \hat{\psi}'(u) \quad (2.25)$$

*uniformément sur tout compact  $K \subset \overset{\circ}{U}$ .*

*Preuve* On montre que  $\hat{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(\overset{\circ}{D})$ . La démonstration est similaire pour  $\hat{\psi}^n \in \mathcal{C}^\infty(\overset{\circ}{D}^n)$ . Il suffit de considérer un compact  $K$  de  $\overset{\circ}{D}$ . On vérifie que  $\hat{\psi}$  est bien dérivable. Notons que pour tout  $u \in K$ ,

$$\frac{d}{du} e^{u(e^x - 1)} - 1 - uh(x) = (e^x - 1)e^{u(e^x - 1)} - h(x).$$



Comme  $h(x) = x$  sur un voisinage de 0, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $u \in K$  et pour  $|x| \leq 1$ ,

$$|(e^x - 1)e^{u(e^x - 1)} - h(x)| \leq Cx^2.$$

Il existe également  $C' > 0$  tel que pour tout  $u \in K$  et pour  $x < -1$ ,  $|e^x - 1|e^{u(e^x - 1)} \leq C'$  et il existe  $\delta \in \overset{\circ}{D}$  tel que pour  $x > 1$ ,  $(e^x - 1)e^{u(e^x - 1)} \leq e^{\delta(e^x - 1)}$ . Ainsi, la fonction  $\hat{\psi}$  est dérivable et pour tout  $u \in K$ ,

$$\hat{\psi}'(u) = b + \frac{1}{2} + cu + \int_{\mathbb{R}^*} ((e^x - 1)e^{u(e^x - 1)} - h(x))\nu(dx).$$

On obtient des expressions similaires pour les fonctions  $\hat{\psi}'_n$ . On montre alors que les fonctions  $\hat{\psi}_n$  et  $\hat{\psi}$  sont de classe  $C^\infty$  en raisonnant de la même manière sur les dérivées successives.

On montre maintenant la convergence uniforme (2.25). Comme les fonctions  $\hat{\psi}'_n$  et  $\hat{\psi}'$  sont continues et croissantes sur  $K$ , la convergence uniforme sur  $K$  est équivalente à la convergence ponctuelle. Par les conditions 2. et 3., il suffit de montrer que pour tout  $u \in K$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^*} f(u, x)\nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^*} f(u, x)\nu(dx) \quad (2.26)$$

où  $f(u, x) = (e^x - 1)e^{u(e^x - 1)} - h(x) - h^2(x)(u + \frac{1}{2})$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(u, x)}{x^2} = 0$ , on a par la condition 4. la convergence des intégrales sur l'ensemble  $\{x < 1\}$ . De plus, il existe  $\delta > u$  qui appartient à  $\overset{\circ}{U}$  et donc tel que  $\sup_n \int_{x > 1} e^{\delta(e^x - 1)}\nu_n(dx) < +\infty$ . Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\delta(e^x - 1)}}{(e^x - 1)e^{u(e^x - 1)}} = +\infty,$$

on en déduit l'uniforme intégrabilité de la famille  $((e^x - 1)e^{u(e^x - 1)}\nu_n(dx))_{n \geq 1}$  et donc (2.26).  $\square$

On peut maintenant étudier la convergence de la suite  $\theta_n$ . On rappelle que  $\alpha = \sup U$ .

**Lemme 2.11** *Sous les hypothèses du Théorème 2.8 :*

*Si  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) > 0$ , l'équation (2.18) a une solution  $\theta < \alpha$  et*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = \theta. \quad (2.27)$$

*Si  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) = 0$ ,  $\theta = \alpha$  et*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = \theta. \quad (2.28)$$

*Si  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) < 0$ , l'équation (2.18) peut ou peut ne pas avoir de solution, mais*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = \alpha. \quad (2.29)$$

*Preuve* On commence par supposer que  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) > 0$ . On rappelle que l'on suppose que  $X$  n'est pas monotone ce qui entraîne par le Lemme 2.9 que  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{\psi}'(u) <$

0. Comme  $\hat{\psi}'$  est continue sur  $\overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{D}$ , il existe  $\theta < \alpha$  tel que  $\hat{\psi}'(\theta) = 0$ . De plus, comme pour tout  $n$  la fonction  $\hat{\psi}'_n$  est croissante, la convergence des fonctions  $\hat{\psi}'_n$  sur  $U$  entraîne en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'_n(u) \geq \lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u). \quad (2.30)$$

On a donc pour  $n \geq n_0$ ,  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'_n(u) > 0$ , ce qui implique  $\theta_n < \alpha$ . Comme  $\theta$  est l'unique solution de l'équation  $\hat{\psi}'(u) = 0$ , on peut alors déduire de l'uniforme convergence montrée dans le Lemme 2.10 que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = \theta$ .

On suppose maintenant que  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) \leq 0$ . Par le lemme de Fatou,

$$\int_{x>1} (e^x - 1)e^{\alpha(e^x-1)} \nu(dx) \leq \liminf_{u \rightarrow \alpha^-} \int_{x>1} (e^x - 1)e^{u(e^x-1)} \nu(dx) < +\infty.$$

Ainsi,  $\hat{\psi}'(\alpha)$  est bien défini, et donc par le théorème de convergence monotone, on a  $\hat{\psi}'(\alpha) = \lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u)$ . En particulier, si cette limite est 0, l'équation  $\hat{\psi}'(u) = 0$  admet pour solution  $\theta = \alpha$ . Dans les deux cas, pour tout  $u < \alpha$ ,  $\hat{\psi}'(u) < 0$  et donc par le Lemme 2.10, on a  $\hat{\psi}'_n(u) < 0$  pour  $n$  assez grand. Ainsi, à partir d'un certain rang,  $\theta_n > u$  et donc  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \theta_n \geq \alpha$ . D'autre part, par définition de l'ensemble  $U$ , il existe pour tout  $u > \alpha$ , une sous-suite  $n'$  telle que  $\lim_{n' \rightarrow +\infty} \hat{\psi}'_{n'}(u) = +\infty$ , et donc telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_{n'} \leq u$ . On en déduit que  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \theta_n \leq \alpha$ , et donc finalement que  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = \alpha$ .  $\square$

On peut maintenant montrer le Théorème 2.8 :

*Preuve du Théorème 2.8 :* Dans le cas  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) \geq 0$ , on peut appliquer le Théorème 2.1 ou le Théorème 2.2. On montre ici que les hypothèses du Théorème 2.2 sont vérifiées. On rappelle que  $Y^n(x) = e^{\theta_n(e^x-1)}$  et que  $Y(x) = e^{\theta(e^x-1)}$ . On a donc

$$Y^n(x) = 1 + \theta_n x + x \epsilon_n(x) \text{ et } Y(x) = 1 + \theta x + x \epsilon(x) \quad (2.31)$$

avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_n(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ . Par le lemme 2.11, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = \theta$ . Ainsi, pour  $n$  assez grand

$$|\epsilon_n(x) - \epsilon(x)| \leq e^{|\theta+1||e^x-1|} |\theta_n^2 - \theta^2| x$$

et  $\epsilon_n$  converge donc uniformément vers  $\epsilon$  sur les compacts. De plus, la condition j) du Théorème 2.2 est vérifiée. Comme  $\hat{\psi}'_n(\theta_n) = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{x \geq \epsilon} (e^x - 1)e^{\theta_n(e^x-1)} \nu_n(dx) &= - \left[ b_n + c_n \left( \frac{1}{2} + \theta_n \right) + \int_{x < \epsilon} (e^x - 1)e^{\theta_n(e^x-1)} - h(x) \nu_n(dx) \right] \\ &= - \left[ b_n + \left( \frac{1}{2} + \theta_n \right) (c_n + \int_{\mathbb{R}} h^2(x) \nu_n(dx)) - \int_{x \geq \epsilon} \left( \frac{1}{2} + \theta_n \right) h^2(x) \nu_n(dx) \right] \\ &\quad - \int_{x < \epsilon} ((e^x - 1)e^{\theta_n(e^x-1)} - h(x) - \left( \frac{1}{2} + \theta_n \right) h^2(x)) \nu_n(dx). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Les hypothèses 2., 3. et 4. du Théorème ainsi que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = \theta$  entraînent alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq \epsilon} (e^x - 1)e^{\theta_n(e^x-1)} \nu_n(dx) = -b - c \left( \frac{1}{2} + \theta \right) - \int_{x < \epsilon} ((e^x - 1)e^{\theta(e^x-1)} - h(x)) \nu(dx). \quad (2.33)$$

On en déduit en particulier

$$\sup_n \int_{x \geq \epsilon} (e^x - 1) e^{\theta_n(e^x - 1)} \nu_n(dx) < +\infty. \quad (2.34)$$

Ceci, et le fait que la fonction à intégrer est bornée par  $e^{\theta+1}$  sur  $\{x \leq -\epsilon\}$ , implique que la famille  $(e^{\theta_n(e^x - 1)})_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable sur  $\{|x| \geq \epsilon\}$ , de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq \epsilon} e^{\theta_n(e^x - 1)} \nu_n(dx) = \int_{|x| \geq \epsilon} e^{\theta(e^x - 1)} \nu(dx). \quad (2.35)$$

Finalement, on déduit de (2.33) et de  $\hat{\psi}'(\theta) = 0$  que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} (e^x - 1) e^{\theta_n(e^x - 1)} \nu_n(dx) = \int_{x \geq 1} (e^x - 1) e^{\theta(e^x - 1)} \nu(dx) \quad (2.36)$$

et donc que  $P^*$  est une mesure martingale équivalente.

Si maintenant  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}(u) < 0$ , les conditions (2.31), (2.35) et 1. restent vraies avec  $\alpha$  à la place de  $\theta$ . Cependant, (2.36) n'est plus vérifiée et  $P^*$  n'est donc pas une mesure martingale pour le modèle limite.

Dans tous les cas, les conditions du Théorème 2.2 sont vérifiées et on a montré le Théorème 2.8.  $\square$

On donne finalement deux exemples, qui montrent deux comportements différents qui peuvent apparaître lorsque  $\lim_{u \rightarrow \alpha^-} \hat{\psi}'(u) < 0$ .

**Exemple 2.1.** Les processus  $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ , avec  $\alpha > 0$ ,  $0 \leq \beta < \alpha$ ,  $\delta > 0$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  sont des cas particuliers de processus hyperboliques généralisés, introduits par Barndorff-Nielsen [5]. Le paramètre  $\mu$  est le drift alors que  $\alpha, \beta, \delta$  interviennent dans la définition de la mesure de Lévy :

$$\nu(dx) = \frac{\delta \alpha e^{\beta x}}{\pi |x|} K_1(\alpha |x|).$$

Ici,  $K_1$  désigne une fonction de Bessel modifiée de troisième espèce dont une représentation intégrale est donnée par

$$K_1(z) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z(y + \frac{1}{y})} dy.$$

Il s'agit d'une fonction dérivable, décroissante, et son comportement en 0 et  $+\infty$  est donnée par les formules suivantes (cf. formules 9.6.9 et 9.7.2 de [1]) :

$$K_1(z) \sim \frac{1}{z} \text{ quand } z \rightarrow 0 \text{ et } K_1(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \text{ quand } z \rightarrow +\infty.$$

La fonction cumulante  $\kappa$  du processus  $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ , définie par  $E[e^{uX_t}] = e^{t\kappa(u)}$ , est alors donnée par (cf [38]),

$$\kappa(u) = \mu u + \delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2}). \quad (2.37)$$

Soit maintenant pour tout  $n \geq 1$ ,  $V^n$  un processus  $NIG(n, 0, n, 0)$  et  $Z^n$  un processus  $NIG(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{n}, 0)$ , indépendant de  $V^n$ . On considère la suite de processus de Lévy  $(X^n)_{n \geq 1}$  définie par

$$X_t^n = bt + V_t^n + Z_t^n.$$

On note  $\kappa_n$  la fonction cumulant de  $X^n$ . On déduit alors de (2.37) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \kappa_n(u) = bu + \frac{u^2}{2}$$

de sorte que

$$\mathcal{L}(X^n | P^n) \longrightarrow (bt + W_t)_{t \geq 0}$$

où  $W$  est un mouvement Brownien standard. D'autre part, on a pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\hat{\psi}^n(u) = ub + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x)) \nu_n(dx)$$

où

$$\nu_n(dx) = \frac{n^2 K_1(n|x|) + \frac{1}{4n} K_1(\frac{|x|}{4})}{\pi|x|}.$$

Pour chaque  $n$ ,  $\hat{\psi}_n$  est convexe, définie sur  $] -\infty, 0]$  et dérivable sur  $] -\infty, 0[$ , de sorte que  $\alpha = 0$ . De plus, pour tout  $u \leq -1$ ,

$$\hat{\psi}^{n'}(u) \leq b + \int_{x \geq -1} (e^x - 1) e^{-(e^x-1)} - h(x) \nu_n(dx) + (e^{-1} - 1) \int_{x < -1} e^{u(e^x-1)} \nu_n(dx).$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{\psi}^{n'}(u) = -\infty.$$

D'autre part, pour  $u > -1$ , on a

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{n'}(u) &\geq b + \int_{x \leq 1} (e^x - 1) e^{-(e^x-1)} \nu_n(dx) + \int_{x \geq \ln(1+\frac{1}{2\sqrt{u}})} (e^x - 1) e^{-(e^x-1)} \nu_n(dx) \\ &\quad + e^{\frac{\sqrt{u}}{2}} \int_1^{\ln(1+\frac{1}{2\sqrt{u}})} (e^x - 1) \nu_n(dx) \end{aligned}$$

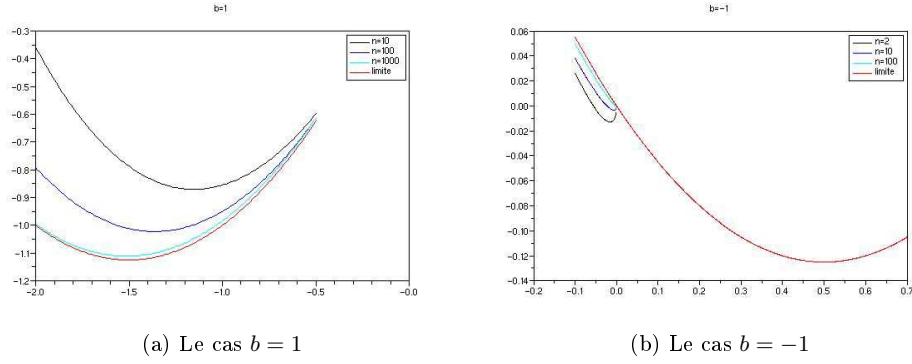
Comme  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A (e^x - 1) \nu_n(dx) = +\infty$ , on en déduit que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \hat{\psi}^{n'}(u) = +\infty.$$

Ainsi, il existe pour tout  $n \geq 1$ , un unique réel  $\beta_n < 0$  tel que  $\hat{\psi}^{n'}(\beta_n) = 0$  et on peut associer au modèle  $(e^{X^n})$  une mesure martingale équivalente d'entropie minimale. On étudie maintenant la limite des prix associés lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Notons que comme le modèle limite est un modèle de Black-Scholes, on a  $\lim_{u \rightarrow 0} \hat{\psi}'(u) = b + \frac{1}{2}$ . Ainsi, d'après le Théorème 2.8, si  $b + \frac{1}{2} \geq 0$ , on a la convergence de la suite de prix vers le prix dans le modèle de Black-Scholes, pour toutes les options qui vérifient (2.2). Si par contre  $b + \frac{1}{2} < 0$  et  $g$  est bornée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_P[g(S)]$$

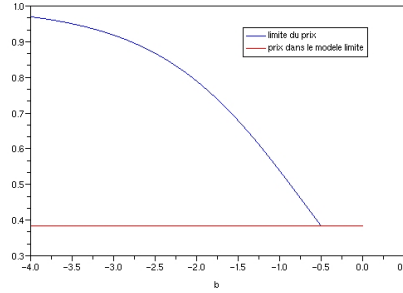
où  $P$  est la mesure initiale. On peut illustrer cette différence de comportement en représentant quelques fonctions  $\hat{\psi}^n$  et  $\hat{\psi}$  lorsque  $b = 1$  et  $b = -1$ .


 FIG. 2.1: Les fonctions  $\hat{\psi}$  et  $\hat{\psi}^n$ 

Dans le premier cas,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = -(b + \frac{1}{2})$  alors que dans le deuxième cas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0 < -(b + \frac{1}{2})$ . Notons toutefois que lorsque  $b + \frac{1}{2} < 0$ , Le modèle limite a une unique mesure martingale équivalente  $Q \neq P$ . On peut donc comparer le prix d'une option dans ce modèle à la limite de la suite de prix obtenue par minimisation de l'entropie. En particulier, si on considère une option européenne de vente d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{Q^n}(K - S_T^+)^+ = E_P(K - S_T)^+ > E_Q(K - S_T)^+.$$

En effet, sous  $P$ , la variable aléatoire  $\ln(S_T)$  a pour loi  $\mathcal{N}(bT, 1)$  alors que sous  $Q$ , elle a pour loi  $\mathcal{N}(-\frac{1}{2}, 1)$ . Ainsi, la différence entre les deux prix croît lorsque  $b$  tend vers  $-\infty$ . On peut par exemple représenter cette différence en fonction de  $b$ , pour  $K = 1$  et  $T = 1$  :


 FIG. 2.2: Prix dans le modèle limite et limite des prix en fonction de  $b$ 

**Exemple 2.2** On considère maintenant une suite de processus  $\text{NIG}(\alpha_n, -\alpha_n, 1, -1)$  avec  $\alpha_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$ . On a alors

$$\hat{\psi}_n(u) = -u + \frac{\alpha_n}{\pi} \int_{\mathbb{R}^*} (e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x)) e^{-\alpha_n x} \frac{K_1(\alpha_n |x|)}{|x|} dx$$

Les fonctions  $\hat{\psi}_n$  sont définies sur  $] -\infty, 0]$  et dérivables sur  $] -\infty, 0[$  de sorte que  $\alpha = 0$  comme dans le cas précédent. On vérifie également comme dans l'exemple précédent que  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{\psi}'_n(u) = -\infty$  et que pour tout  $\alpha_n < \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{u \rightarrow 0} \hat{\psi}'_n(u) = +\infty$ .

Ainsi, l'équation  $\hat{\psi}'_n(u) = 0$  admet une solution et il existe une mesure martingale équivalente d'entropie minimale. On a pour tout  $n \geq 1$ ,  $b_n = -1$ . De plus, comme les fonctions  $K_1$  sont décroissantes et  $\alpha_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) \nu_n(dx) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) e^{-\frac{x}{2}} \frac{K_1(\frac{|x|}{2})}{|x|} dx$$

et pour toute fonction continue bornée  $f$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^*} f(x) \nu_n(dx) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^*} f(x) e^{-\frac{x}{2}} \frac{K_1(\frac{|x|}{2})}{|x|} dx.$$

Ainsi, les conditions 2., 3. et 4. du Théorème 2.8 sont vérifiées pour le processus limite  $X$  qui est un processus NIG( $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1$ ). La fonction  $\hat{\psi}'$  est alors définie sur  $] -\infty, 0]$  et  $\hat{\psi}'(0) = -1$ . L'équation  $\hat{\psi}'(u) = 0$  n'a donc pas de solution et le modèle limite n'a pas de mesure martingale d'entropie minimale. Cependant, le Théorème 2.8 permet d'obtenir pour certaines options la limite de la suite de prix. En particulier, pour une option européenne de vente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_P(K - S_T)^+.$$

### 2.3.2 Mesures minimisant une $f^q$ -divergence, $q > 1$ ( $\gamma > -1$ )

Le cas  $\gamma > -1$  correspond aux fonctions de la forme  $f(x) = x^q$ ,  $q > 1$ . Des conditions d'existence des mesures minimales similaires à celles du paragraphe précédent ont été données ([43], [16]). Cependant, afin de pouvoir regrouper différents cas, on énonce ici un résultat du chapitre suivant valable pour tout  $\gamma \neq -1$ . On renvoie au paragraphe 3.3.7 pour sa preuve.

**Proposition 2.12** *On suppose que  $f''(x) = ax^\gamma$ ,  $a > 0$ ,  $\gamma \neq -1$ . Alors il existe une mesure  $f$ -minimale si et seulement si il existe  $\beta^* \in \mathbb{R}$  tel que*

$$1 + (\gamma + 1)\beta^*(e^y - 1) > 0 \quad (\nu - p.p), \quad (2.38)$$

$$\int_{|y| \geq 1} (e^y - 1)(1 + (\gamma + 1)\beta^*(e^y - 1))^{\frac{1}{\gamma+1}} \nu(dy) < +\infty, \quad (2.39)$$

$$b + \frac{c}{2} + c\beta^* + \int_{\mathbb{R}^*} \left( (e^y - 1)(1 + (\gamma + 1)\beta^*(e^y - 1))^{\frac{1}{\gamma+1}} - h(y) \right) \nu(dy) = 0. \quad (2.40)$$

Ses paramètres de Girsanov sont alors  $\beta^*$  et  $Y(y) = (1 + (\gamma + 1)\beta^*(e^y - 1))^{\frac{1}{\gamma+1}}$ .

On se restreint maintenant au cas  $\gamma > -1$ . On considère comme précédemment un processus de Lévy non monotone  $X$  de caractéristiques  $(b, c, \nu)$ . Afin de pouvoir vérifier (2.39), on suppose de plus que

$$I(\gamma) = \int_{x \geq 1} e^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}x} \nu(dx) < +\infty.$$

On associe alors à  $X$  la fonction continue

$$F(u) = b + \frac{c}{2} + cu + \int_{\mathbb{R}^*} ((e^x - 1)Y_u(x) - h(x)) \nu(dx)$$

où

$$Y_u(x) = \begin{cases} (1 + (\gamma + 1)u(e^x - 1))^{\frac{1}{\gamma+1}} & \text{si } (\gamma + 1)u(e^x - 1) \geq -1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.41)$$

On a alors un résultat analogue au Lemme 2.9 :

**Lemme 2.13** *Un processus de Lévy  $X$  est monotone si et seulement si*

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} F(u) \geq 0 \text{ ou } \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) \leq 0.$$

On commence par remarquer qu'il est toujours possible de minimiser la  $f^{\gamma+2}$ -divergence sur l'ensemble des mesures martingales absolument continues par rapport à  $P$ .

**Lemme 2.14** *Soit  $X$  un processus de Lévy non monotone tel que  $I(\gamma) < +\infty$ . Alors l'équation  $F(u) = 0$  admet une unique solution  $\beta^*$ , et  $(\beta^*, Y_{\beta^*})$  sont les paramètres de Girsanov de la mesure  $Q^*$  qui minimise la  $f^q$ -divergence sur l'ensemble des mesures martingales absolument continues par rapport à  $P$ . De plus,  $Q^*$  est équivalente à  $P$  si et seulement si  $Y_{\beta^*} > 0$  ( $\nu$ -pp).*

*Preuve* Comme  $X$  n'est pas monotone et  $F$  est continue, l'équation  $F(u) = 0$  admet une solution  $\beta^*$  qui est de plus unique car  $F$  est strictement croissante. Notons que

$$Y_{\beta^*}(x) = 1 + \beta^*x + o(x)$$

au voisinage de 0 et que  $I(\gamma) < +\infty$ , de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^*} (\sqrt{Y_{\beta^*}(x)} - 1)^2 \nu(dx) < +\infty.$$

Ainsi,

$$N_t = \beta^* X_t^{(c)} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} (Y_{\beta^*}(x) - 1)(\mu^X - \nu(dx)) ds$$

est une martingale bien définie et  $Z^* = \mathcal{E}(N)$  définit la densité d'une mesure  $Q^*$  absolument continue par rapport à  $P$ , de paramètres de Girsanov  $(\beta^*, Y_{\beta^*})$ . De plus, comme  $F(\beta^*) = 0$ ,  $Q^*$  est une mesure martingale. On peut alors suivre par exemple la démonstration du Théorème 2.9 dans [43] pour montrer que  $Q^*$  minimise la  $f^q$ -divergence parmi l'ensemble des mesures absolument continues par rapport à  $P$  : par la formule d'Itô, si  $Z$  est la densité d'une mesure martingale  $Q$  de paramètres de Girsanov  $(\beta, Y)$ , on a  $E[Z_T^{\gamma+2}] = e^{\kappa(\beta, Y)T}$  où

$$\kappa(\beta, Y) = \frac{(\gamma + 2)(\gamma + 1)}{2} \beta^2 c + \int_{\mathbb{R}^*} Y^{\gamma+2}(x) - 1 - (\gamma + 2)(Y(x) - 1) \nu(dx)$$

On montre alors que pour toute mesure martingale  $Q$ ,  $\kappa(\beta^*, Y^*) \leq \kappa(\beta, Y)$ . Par convexité des fonctions  $\beta \mapsto \beta^2$  et  $y \mapsto y^{\gamma+2} - 1 - (\gamma + 2)(y - 1)$ , on a

$$\begin{aligned} \kappa(\beta, Y) - \kappa(\beta^*, Y^*) &\geq (\gamma + 2) \left( \frac{\gamma + 1}{2} 2\beta^* c (\beta - \beta^*) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^*} (Y^{*\gamma+1}(x) - 1)(Y(x) - Y^*(x)) \mathbf{1}_{\{Y^*(x) > 0\}} \nu(dx) \right) \\ &\geq (\gamma + 2)(\gamma + 1) \beta^* \left( c(\beta - \beta^*) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^*} (e^x - 1)(Y(x) - Y^*(x)) \mathbf{1}_{\{Y^*(x) > 0\}} \nu(dx) \right). \end{aligned}$$

Or comme  $Q$  et  $Q^*$  sont des mesures martingales, on a

$$\begin{aligned} b + \frac{c}{2} + c\beta^* + \int_{\mathbb{R}^*} (e^x - 1)Y^*(x) - 1 - h(x)\nu(dx) \\ = b + \frac{c}{2} + c\beta + \int_{\mathbb{R}^*} (e^x - 1)Y(x) - 1 - h(x)\nu(dx) = 0 \end{aligned}$$

de sorte que le membre de droite de la dernière inégalité vaut 0 et donc  $\kappa(\beta, Y) \geq \kappa(\beta^*Y^*)$ . De plus,  $Q^*$  sera équivalente à  $P$  si et seulement si  $Y_{\beta^*} > 0$   $\nu$ -p.p.  $\square$

On considère maintenant une suite de modèles associés aux processus de Lévy  $(X^n)_{n \geq 1}$  de caractéristiques  $(b_n, c_n, \nu_n)$ . On suppose que pour chaque  $n$ ,

$$I_n(\gamma) = \int_{x \geq 1} e^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}x} \nu_n(dx) < +\infty$$

et on définit les fonctions analogues à  $F$  :

$$F^n(u) = b_n + \frac{c_n}{2} + c_n u + \int_{\mathbb{R}^*} (e^x - 1)Y_u(x) - h(x)\nu_n(dx). \quad (2.42)$$

On note pour tout  $n \geq 1$ ,  $\beta_n$  l'unique réel tel que  $F^n(\beta_n) = 0$  et  $Y^n$  la fonction  $Y^n = Y_{\beta_n}$ .  $(\beta^n, Y^n)$  sont alors les paramètres de Girsanov associées à la mesure  $f$ -minimale  $Q^n$ . On suppose que  $Q^n$  est équivalente à  $P^n$  et donc que  $Y^n > 0$   $\nu_n$ -pp. On suppose également que  $\nu(\{m\}) = \nu(\{M\}) = 0$ , où  $m$  et  $M$  désignent les bornes inférieures et supérieures du support de  $\nu$ . On a alors le résultat suivant :

**Théorème 2.15** *Soit  $\gamma > -1$ . On suppose que la fonction de payoff  $g$  vérifie (2.2) et que les conditions 1., 2., 3. et 4. du Théorème 2.8 sont vérifiées. Alors :*

*Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma) < +\infty$ , le modèle limite a une mesure martingale équivalente qui minimise la  $f^{\gamma+2}$ -divergence. De plus,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = \mathbb{C}_T.$$

*Dans les autres cas, l'existence d'une mesure martingale de  $f^{\gamma+2}$ -divergence minimale n'est pas garantie.*

*Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma) + a, a > 0$  et si  $g$  est bornée,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{P^*}[g(S)]$$

*où  $P^*$  est une mesure équivalente à  $P$  sous laquelle  $S$  n'est pas une martingale.*

*Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = +\infty$ , et si  $g$  est bornée,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_P[g(S)]$$

*où  $P$  est la mesure initiale.*

Comme dans le cas de l'entropie relative, le résultat repose sur la convergence de la suite  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  qui s'obtient à partir de la convergence uniforme des fonctions  $F^n$ . On commence donc par étudier la convergence des fonctions  $F^n$  :



**Lemme 2.16** *Si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma) < +\infty, \quad (2.43)$$

*alors  $F^n$  converge uniformément sur les compacts vers  $F$ . Si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma) + a, a > 0, \quad (2.44)$$

*alors  $F^n$  converge uniformément sur les compacts vers  $\tilde{F} > F$ . Si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(u) = +\infty, \quad (2.45)$$

*alors pour tout  $u > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(u) = +\infty$ .*

*Preuve* Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , les conditions 2., 3. et 4. impliquent

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n + \frac{c_n}{2} + c_n u + \int_{x < 1} [(e^x - 1)Y_u(x) - h(x)]\nu_n(dx) \\ = b + \frac{c}{2} + cu + \int_{x < 1} [(e^x - 1)Y_u(x) - h(x)]\nu(dx) \end{aligned} \quad (2.46)$$

où  $Y_u$  est définie par (2.41). On remarque qu'il existe une constante positive  $C$  telle que pour tout  $x \geq 1$ ,

$$0 \leq (e^x - 1)Y_u(x) \leq C e^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}x}. \quad (2.47)$$

Si (2.43) est vérifiée, ceci entraîne par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} (e^x - 1)Y_u(x)\nu_n(dx) = \int_{x \geq 1} (e^x - 1)Y_u(x)\nu(dx).$$

On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(u) = F(u)$ .

Si par contre (2.44) est vérifiée, on a pour  $u \neq 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} (e^x - 1)Y_u(x)\nu_n(dx) > \int_{x \geq 1} (e^x - 1)Y_u(x)\nu(dx)$$

de sorte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(u) = \tilde{F}(u) > F(u)$ . De plus, dans ces deux cas, toutes les fonctions considérées sont continues et strictement croissantes, de sorte que la convergence est uniforme sur les compacts.

Finalement, si (2.45) est vérifiée, alors  $\nu_n(\{x \geq 1\}) > 0$  pour  $n$  assez grand. Ainsi, pour tout  $u > 0$ ,  $Y_u > 0$  sur  $\{x \geq 1\}$ , et on a au voisinage de  $+\infty$ ,

$$(e^x - 1)Y_u(x) \sim (u(\gamma + 1))^{\frac{1}{\gamma+1}} e^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}x}.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = +\infty$ , on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} (e^x - 1)Y_u(x)\nu_n(dx) = +\infty$$

de sorte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(u) = +\infty$ .  $\square$

On en déduit alors le résultat suivant pour  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  :

**Lemme 2.17** Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) < +\infty$ , la suite  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\beta$  où  $\beta$  est l'unique solution de l'équation  $F(u) = 0$  si (2.43) est vérifiée, et est l'unique solution de l'équation  $\tilde{F}(u) = 0$  si (2.44) est vérifié.  
Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$ .

*Preuve* On commence par considérer le cas (2.43). On suppose que

$$\underline{\beta} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \beta_n < \bar{\beta} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \beta_n.$$

Tout d'abord, comme  $X$  n'est pas monotone, on déduit du Lemme 2.13 que  $\underline{\beta} \neq -\infty$  et que  $\bar{\beta} \neq +\infty$  de sorte que  $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$  est un compact de  $\mathbb{R}$ . Soient alors  $(\beta^{n'})$  et  $(\beta^{n''})$  deux sous-suites telles que  $\beta^{n'} \rightarrow \underline{\beta}$  et  $\beta^{n''} \rightarrow \bar{\beta}$ . Par la convergence uniforme montrée au Lemme 2.16, ceci entraîne que  $F(\underline{\beta}) = 0$  et  $F(\bar{\beta}) = 0$  ce qui est impossible car la solution à l'équation  $F(u) = 0$  est unique.

Le cas (2.44) se traite de la même façon en remplaçant  $F$  par  $\tilde{F}$ .

Si on a maintenant (2.45), alors par le Lemme 2.16, on a pour tout  $u > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(u) = +\infty$ . Ainsi, pour tout  $u > 0$ ,  $\beta_n < u$  pour  $n$  assez grand, de sorte que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \beta_n \leq 0$ . D'autre part, (2.45) implique également  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \text{supp}(\nu_n) = +\infty$ . Comme la mesure  $Q^n$  est équivalente à  $P^n$ , on doit avoir  $Y^n > 0$   $\nu_n$ -p.p et donc pour  $n$  assez grand,  $1 + \beta_n(\gamma + 1)(e^x - 1) > 0$  pour de grandes valeurs de  $x$ . On a donc  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \beta_n \geq 0$ , et donc finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$ .  $\square$

*Preuve du Théorème 2.15* On vérifie les conditions d'application du Théorème 2.2. Par le lemme précédent, dans chaque cas, il existe un réel  $\beta$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \beta$  et on définit la fonction  $Y(x) = (1 + \beta(e^x - 1))^{\frac{1}{\gamma+1}}$ . Comme  $\text{supp}(\nu_n) \subseteq \{x : Y^n(x) > 0\}$ , la condition 4. et l'hypothèse  $\nu(\{m\}) = \nu(\{M\}) = 0$  impliquent que  $\text{supp}(\nu) \subseteq \{x : Y(x) > 0\}$ .

On a pour chaque  $n \geq 1$ ,

$$Y^n(x) = 1 + \beta_n x + x \epsilon_n(x) \text{ et } Y(x) = 1 + \beta x + x \epsilon(x)$$

avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_n(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ . De plus, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \beta$ , il existe sur tout compact une constante  $C > 0$  tel que pour  $n$  assez grand,

$$|\epsilon_n(x) - \epsilon(x)| \leq C|\beta_n - \beta|x.$$

Ainsi,  $\epsilon_n$  converge uniformément vers  $\epsilon$  sur tout compact.

Dans le cas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) < +\infty$ , la famille de fonctions  $(Y^n)_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable sur  $\{|x| \geq \epsilon\}$ . En effet, les fonctions  $Y^n$  sont bornées sur  $x \leq -\epsilon$  et pour  $x \geq \epsilon$ , on a (2.47) pour une certaine constante  $C = C(\epsilon)$ . On en déduit donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq \epsilon} Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{|x| \geq \epsilon} Y(x) \nu(dx)$$

et on peut appliquer le Théorème 2.2. De plus, si (2.43) est vérifiée, on a également

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} e^x Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{x \geq 1} e^x Y(x) \nu(dx)$$

de sorte que  $P^* = Q$  est une mesure martingale équivalente. Comme  $F(\beta) = 0$ , il s'agit de la mesure de  $f^{\gamma+2}$ -divergence minimale. Par le Théorème 2.2, la convergence des prix est assurée pour toutes les fonctions de payoff qui vérifient (2.2).

Finalement, si (2.45) est vérifiée, on a d'après le Lemme 2.17,  $\beta = 0$  et donc  $Y(x) = 1$ . Les fonctions  $Y^n$  convergent uniformément vers 1 sur  $\{x \leq -\epsilon\}$  de sorte que

$$\int_{x \leq -\epsilon} Y^n(x) \nu_n(dx) = \nu(\{x \leq -\epsilon\}).$$

De plus, on peut déduire des conditions 2., 3. et 4. et de  $F^n(\beta_n) = 0$  que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq \epsilon} (e^x - 1) Y^n(x) \nu_n(dx) = -b - \frac{c}{2} - \int_{x < \epsilon} (e^x - 1) - h(x) \nu(dx).$$

Ainsi, la famille  $(Y^n(x) I_{\{|x| \geq \epsilon\}})_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq \epsilon} Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{x \geq \epsilon} \nu(dx).$$

Les conditions d'application du Théorème 2.2 sont donc vérifiées.  $\square$

On donne finalement quelques exemples qui illustrent les différents comportements possibles.

**Exemple 2.3.** On considère le cas  $\gamma = 0$ , ce qui correspond à  $q = 2$ , et donc aux mesures de variance minimale. Dans ce cas, on a en particulier

$$Y_u(x) = 1 + u(e^x - 1). \quad (2.48)$$

On rappelle qu'un processus CGMY( $C, A, B, \alpha, b$ ) est un processus de Lévy purement discontinu de caractéristiques  $(b, 0, \nu)$  où

$$\nu(dx) = \frac{C}{|x|^{\alpha+1}} (e^{-A|x|} \mathbf{1}_{\{x < 0\}} + e^{-Bx} \mathbf{1}_{\{x > 0\}}).$$

On suppose ici que les processus  $X^n$ ,  $n \geq 1$ , sont des processus CGMY( $1, 1, B_n, 0, b_n$ ), où il existe  $B \geq 2$  tel que

$$B_n = B + \frac{1}{n} \text{ et } b_n = \int_{[-1,1]} h(x) \nu_n(dx) - \int_{\mathbb{R}^{+*}} (e^x - 1) \nu_n(dx)$$

avec  $\nu_n(dx) = \frac{1}{x} (e^{-|x|} \mathbf{1}_{\{x < 0\}} + e^{-(B+\frac{1}{n})x} \mathbf{1}_{\{x > 0\}})$ . Comme  $B_n > 2$ , la fonction  $F_n$  est alors bien définie sur  $[0, 1]$  et est donnée par

$$F^n(u) = b_n + \int_{\mathbb{R}^{+*}} (u(e^x - 1)^2 + e^x - 1 - h(x)) \nu_n(dx). \quad (2.49)$$

On a pour tout  $n \geq 1$ ,

$$F^n(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} dx < 0.$$

D'autre part,  $\lim_{B \rightarrow 2^+} \int_{x \geq 1} (e^x - 1)^2 \frac{e^{-Bx}}{x} dx = +\infty$ . Il existe donc  $B_0 > 2$  tel que pour tout  $B$ ,  $2 \leq B < B_0$ , et tout  $n$  assez grand,

$$\int_{\mathbb{R}^{+*}} (e^x - 1)^2 \frac{e^{-(B+\frac{1}{n})x}}{x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} dx > 0.$$

On a alors  $F_n(1) > 0$ . Ainsi, pour tout  $B$  tel que  $2 \leq B < B_0$ , il existe une mesure de variance minimale associée au modèle  $e^{X^n}$  pour  $n$  assez grand. On cherche alors à appliquer le Théorème 2.15. Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \int_{[-1,1]} h(x) \nu(dx) - \int_{\mathbb{R}^+} (e^x - 1) \nu(dx)$$

avec  $\nu(dx) = \frac{1}{x}(e^{-|x|} \mathbf{1}_{\{x < 0\}} + e^{-Bx} \mathbf{1}_{\{x > 0\}})$ . On note  $b$  cette limite. De même, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) \nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) \nu(dx)$$

et pour toute fonction continue bornée  $f$  qui vérifie  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^*} f(x) \nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^*} f(x) \nu(dx).$$

Ainsi, les conditions 2., 3. et 4. du Théorème 2.15 sont satisfaites pour le processus limite qui est un processus CGMY(1, 1,  $B$ , 0,  $b$ ).

Si  $B > 2$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(0) = I(0) < +\infty$ , et donc par le Théorème 2.15, pour toutes les fonctions de payoff qui vérifient (2.2),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = \mathbb{C}_T.$$

Si maintenant  $B = 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(0) = +\infty$ . De plus,  $I(0) = +\infty$ , de sorte que le modèle limite n'a pas de mesure martingale équivalente de variance minimale. Mais par le Théorème 2.15, on a pour toute fonction de payoff bornée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_P[g(S)].$$

**Exemple 2.4.** On considère encore le cas  $\gamma = 0$  et donc  $q = 2$ . On suppose que  $X_t^n = -t + W_t + Z_t^n$ , où  $W$  est un Mouvement Brownien Standard et  $Z^n$  est un processus de Lévy purement discontinu indépendant de  $W$  pour lequel  $\nu_n(dx) = \frac{1}{n} e^{-(2+\frac{a}{n})x} \mathbf{1}_{[n; 2n]}(x) dx$  avec  $a \in \mathbb{R}$ . On considère à nouveau la mesure de variance minimale. On a alors

$$\begin{aligned} F^n(u) &= -1 + \frac{1}{2} + u + \int_n^{2n} \left[ (e^x - 1)(1 + u(e^x - 1)) \frac{e^{-(2+\frac{a}{n})x}}{n} \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} + u + \frac{1}{n} \int_n^{2n} \left[ (ue^{2x} + (1-2u)e^x + (u-1)) e^{-(2+\frac{a}{n})x} \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} + u + u(e^{-a} - e^{-2a}) + \frac{(1-2u)}{n+a} (e^{-(n+a)} - e^{-2(n+a)}) \\ &\quad + \frac{u-1}{2n+a} (e^{-(2n+a)} - e^{-2(2n+a)}) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\gamma_n}{n+a} - \frac{\delta_n}{2n+a} + u \left( \alpha - \frac{2\gamma_n}{n+a} + \frac{\delta_n}{2n+a} \right) \end{aligned}$$

où

$$\alpha = e^{-a} - e^{-2a} + 1, \gamma_n = e^{-(n+a)} - e^{-2(n+a)}, \delta_n = e^{-(2n+a)} - e^{-2(2n+a)}.$$

On a alors pour  $n$  assez grand,  $F^n(0) \leq -\frac{1}{4} < 0$  et  $F^n(1) \geq \frac{1}{4} + e^{-a} - e^{-2a} > 0$  et il existe donc une solution  $\beta_n \in [0, 1]$  à l'équation  $F^n(u) = 0$ . On en déduit qu'il existe une mesure de variance minimale associée au modèle  $e^{X^n}$ . On a pour tout  $n \geq 1$ ,  $b_n = -1$  et  $c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) \nu_n(dx) = 1$ . De plus, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , pour toute fonction continue bornée vérifiant  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_n^{2n} f(x) e^{-(2+\frac{a}{n})x} dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sup f(x)}{n} = 0.$$

Ainsi, les conditions d'application du Théorème 2.15 sont vérifiées pour un processus limite  $X_t = -t + W_t$ .

De plus, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{2n} e^{-\frac{a}{n}x} dx = e^{-a} - e^{-2a}$  alors que  $I(0) = 0$ . Par le Théorème 2.15, on a donc pour toute fonction de payoff continue bornée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{P^*}[g(S)]$$

alors que le modèle limite a une unique mesure martingale équivalente  $Q$  qui est différente de  $P^*$  si  $a \neq 0$ . En particulier, pour une option européenne de vente, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = K \Phi\left(\frac{\ln(K) + B_a T}{\sqrt{T}}\right) - e^{(\frac{1}{2} - B_a)T} \Phi\left(\frac{\ln(K) + (B_a - 1)T}{\sqrt{T}}\right) \quad (2.50)$$

où  $B_a = \frac{e^{-a} - e^{-2a}}{a + e^{-a} - e^{-2a}}$  et  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On peut ainsi comparer, en fonction de  $a$ , la différence entre le prix dans le modèle limite et la limite des prix associés à la mesure de variance minimale. On obtient pour  $K = 1$  et  $T = 1$  le graphique suivant.

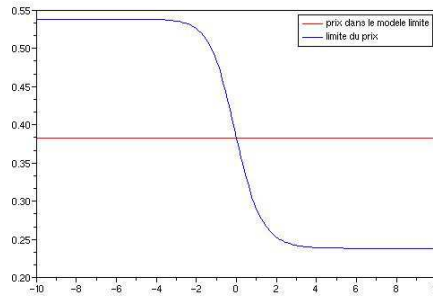


FIG. 2.3: Prix dans le modèle limite et limite de la suite de prix en fonction de  $a$

Les prix coïncident seulement si  $a = 0$ , dans quel cas la mesure initiale est la mesure martingale pour le modèle limite. Pour  $a > 0$ , on a  $B_a < \frac{1}{2}$  et on déduit de (2.50) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{C}_T^n < 0$ . De plus,  $\lim_{a \rightarrow +\infty} B_a = 0$ , et on en déduit que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = \frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}} \Phi(-1)$ . De même, on a  $\lim_{a \rightarrow -\infty} B_a = 1$ , et donc  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = \Phi(1) - e^{\frac{1}{2}}$ .

### 2.3.3 Mesures minimisant une $f^q$ -divergence, $q < 1$ ou une divergence logarithmique ( $\gamma < 1$ )

Ce cas regroupe les fonctions de la forme :  $f(x) = -x^q$ ,  $0 < q < 1$ ,  $f(x) = x^q$ ,  $q < 0$  et  $f(x) = -\ln(x)$ . On obtient ici des résultats très similaires au cas  $\gamma > -1$ . Cependant la fonction  $Y_u$  introduite en (2.41) et définie par

$$Y_u(x) = \begin{cases} (1 + (\gamma + 1)u(e^x - 1))^{\frac{1}{\gamma+1}} & \text{si } (\gamma + 1)u(e^x - 1) \geq -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est plus continue sur  $\mathbb{R}$ , et la fonction  $F$  associée ne l'est pas non plus. Plus précisément, pour tout  $n \geq 1$ , la fonction  $F_n$  définie en (2.42) sera continue et croissante sur l'intervalle

$$\mathcal{D}_n = \{u : 1 + u(\gamma + 1)(e^x - 1) > 0 \text{ } \nu_n\text{-pp}\} \quad (2.51)$$

et de même pour la fonction  $F$  sur l'intervalle

$$\mathcal{D} = \{u : 1 + u(\gamma + 1)(e^x - 1) > 0 \text{ } \nu\text{-pp}\}.$$

On remarque que quel que soit le modèle, on a  $[\frac{1}{\gamma+1}, 0] \subseteq \mathcal{D}$  et que si le support de  $\nu$  est  $\mathbb{R}$ , on a  $\mathcal{D} = [\frac{1}{\gamma+1}, 0]$ . Contrairement au cas  $\gamma > -1$ , l'existence d'une solution  $\beta_n \in \mathcal{D}_n$  à l'équation  $F(\beta_n) = 0$  ne garantit plus une solution  $\beta \in \mathcal{D}$  à l'équation  $F(\beta) = 0$ . Ceci nous conduit à introduire l'intervalle

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \mathcal{D}_k.$$

On remarque que sous l'hypothèse 4. du Théorème 2.8,  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$ . Les résultats de la section précédente se transposent alors facilement sur l'ensemble  $\mathcal{U}$ . En particulier, le Lemme 2.16 devient

**Lemme 2.18** *Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma) < +\infty$ , alors  $F^n$  converge uniformément sur les compacts de  $\mathcal{U}$  vers  $F$ .*

*Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma) + a < +\infty$ ,  $a > 0$ , alors  $F^n$  converge uniformément sur les compacts de  $\mathcal{U}$  vers  $\tilde{F}$ .*

*Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(u) = +\infty$ , alors pour tout  $u \in \mathcal{U}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(u) = +\infty$ .*

On définit

$$m = \liminf_n \inf \text{supp}(\nu_n) \text{ et } M = \limsup_n \sup \text{supp}(\nu_n)$$

Dans le cas où  $(m, M) = \mathbb{R}$ , le résultat de la section précédente reste vrai :

**Théorème 2.19** *Soit  $\gamma < -1$ . On suppose que  $(m, M) = \mathbb{R}$ . On suppose de plus que la fonction de payoff  $g$  vérifie (2.2) et que les conditions 1., 2., 3. et 4. du Théorème 2.8 sont vérifiées. Alors :*

*Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma) < +\infty$ , le modèle limite a une mesure martingale équivalente minimale. De plus,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = \mathbb{C}_T$$

Dans les autres cas, l'existence d'une mesure martingale équivalente minimale n'est pas garantie.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma) + a, a > 0$  et si  $g$  est bornée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{P^*}[g(S)]$$

où  $P^*$  est une mesure équivalente à  $P$  sous laquelle  $S$  n'est pas une martingale.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = +\infty$ , et si  $g$  est bornée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{\tilde{P}}[g(S)]$$

où  $\tilde{P}$  est la mesure équivalente à  $P$  donnée par les paramètres de Girsanov  $(\beta^*, Y_{\beta^*})$ , avec  $\beta^* = \frac{1}{\gamma+1}$ .

**Remarque.** L'hypothèse  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma) < +\infty$  est toujours vérifiée lorsque  $-2 \leq \gamma < -1$ .

On donne d'abord un analogue au Lemme 2.17.

**Lemme 2.20** Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) < +\infty$ , la suite  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\beta$  où  $\beta$  est l'unique solution à l'équation  $F(u) = 0$  si (2.43) est vérifiée, et à l'équation  $\tilde{F}(u) = 0$  si (2.44) est vérifiée.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \frac{1}{\gamma+1}$ .

*Preuve* On commence par remarquer que l'hypothèse  $(m, M) = \mathbb{R}$  entraîne en particulier que

$$\frac{1}{\gamma+1} \leq \underline{\beta} = \liminf \beta_n \leq \bar{\beta} = \limsup \beta_n \leq 0$$

On suppose d'abord que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma)$ . Comme  $F^n$  converge uniformément vers  $F$  sur  $[\frac{1}{\gamma+1}, 0]$ , on a  $F(\underline{\beta}) = F(\bar{\beta}) = 0$ . Par unicité de la solution à l'équation  $F(u) = 0$ , on en déduit que  $\underline{\beta} = \bar{\beta}$ . Si maintenant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = I(\gamma) + a$ , on raisonne de même en considérant la fonction  $\tilde{F}$ .

Si maintenant (2.45), alors pour tout  $u \in [\frac{1}{\gamma+1}, 0]$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(u) = +\infty$ , de sorte que  $\limsup_n \beta_n \leq \frac{1}{\gamma+1}$ . Comme on doit avoir  $\liminf_n \beta_n \geq \frac{1}{\gamma+1}$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \frac{1}{\gamma+1}$ .  $\square$

*Preuve du Théorème 2.19* Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) < +\infty$ , la preuve du Théorème 2.15 reste valable. On considère donc le cas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\gamma) = +\infty$ . On pose  $\beta^* = \frac{1}{\gamma+1}$ . Par le Lemme 2.20,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \beta^*$ . Les fonctions  $Y_{\beta_n}$  sont bornées et convergent uniformément sur  $\{x \leq -\epsilon\}$  vers  $Y_{\beta^*}$  de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \leq -\epsilon} Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{x \leq -\epsilon} Y_{\beta^*}(x) \nu(dx).$$

De plus, comme  $F^n(\beta_n) = 0$ , on a

$$\int_{x \geq \epsilon} (e^x - 1) Y^n(x) \nu_n(dx) = -b - \frac{c}{2} - c\beta_n - \int_{x < \epsilon} ((e^x - 1) Y^n(x) - h(x)) \nu_n(dx).$$

On déduit alors des conditions 2., 3. 4, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq \epsilon} Y^n(x) \nu_n(dx) = -(b + \frac{c}{2} + c\beta^* + \int_{x < \epsilon} (e^x - 1) Y_{\beta^*}(x) \nu(dx)) < +\infty$$

de sorte que la famille  $(Y^n)_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable sur  $\{x \geq \epsilon\}$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq \epsilon} Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{x \geq \epsilon} Y_{\beta^*}(x) \nu(dx).$$

Ainsi, les conditions d'applications du Théorème 2.2 sont vérifiées.  $\square$

Lorsque  $(m, M) \neq \mathbb{R}$ , on a

$$a = \inf \mathcal{U} < \frac{1}{\gamma + 1} \text{ ou } b = \sup \mathcal{U} > 0.$$

Les hypothèses du théorème ne garantissent plus l'existence d'une solution à l'équation  $F(u) = 0$  qui appartient à  $\mathcal{U}$ . Si une telle solution existe, le résultat reste valable. Dans le cas contraire, on a le résultat suivant :

**Théorème 2.21** *Soit  $\gamma < -1$ . On suppose que  $(m, M) \neq \mathbb{R}$ . On suppose de plus que la fonction de payoff  $g$  est continue et bornée et que les conditions 1., 2., 3. et 4. du Théorème 2.8 sont vérifiées. Alors :*

*Si  $F(u) > 0$  sur  $\mathcal{U}$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{\tilde{P}}[g(S.e^{mL})]$$

*où  $\tilde{P}$  est la mesure équivalente à  $P$  donnée par les paramètres de Girsanov  $(a, Y_a)$  et  $L$  est sous  $\tilde{P}$  un processus de Poisson indépendant de  $S$  d'intensité  $\frac{F(a)}{1-e^m}$ .*

*Si  $F(u) < 0$  sur  $\mathcal{U}$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_T^n = E_{\tilde{P}}[g(S.e^{ML})]$$

*où  $\tilde{P}$  est la mesure équivalente à  $P$  donnée par les paramètres de Girsanov  $(b, Y_b)$  et  $L$  est sous  $\tilde{P}$  un processus de Poisson indépendant de  $S$  d'intensité  $\frac{|F(b)|}{e^M - 1}$ .*

*Preuve* On suppose par exemple que pour tout  $u \in \mathcal{U}$ ,  $F(u) > 0$ . Le cas  $F(u) < 0$  se traite de façon similaire. On rappelle que pour tout  $u \in \mathcal{U}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(u) = F(u)$ . Comme les fonctions  $F_n$  et  $F$  sont croissantes, on a donc nécessairement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = a$ . On montre maintenant la convergence en loi

$$\mathcal{L}(X^n | Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X + mL | \tilde{P}) \quad (2.52)$$

en vérifiant les conditions i), ii) et iii) du Th VII.2.9 dans [41]. Tout d'abord, on note que

$$\begin{aligned} b^{Q^n} = & b_n + a(c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) \nu_n(dx)) + \int_{\mathbb{R}^*} h(x) (Y_a(x) - 1 - ah(x)) \nu_n(dx) \\ & + (\beta_n - a)c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h(x) (Y^n(x) - Y_a(x)) \nu_n(dx) \end{aligned}$$



On déduit de 2., 3 et 4. la convergence des trois premiers termes de la somme. De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = a$  et le quatrième terme tend donc vers 0. La convergence du dernier terme s'obtient en remarquant qu'au voisinage de 0,  $Y^n(x) - Y_a(x) \sim (\beta_n - a)(\gamma + 1)x$ . On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{Q^n} = b + ca + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) Y_a(x) \nu(dx) = b^{P^*}.$$

On a de même

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) Y^n(x) \nu_n(dx) = c + \int_{\mathbb{R}^*} h^2(x) Y(x) \nu(dx)$$

et pour toute fonction continue bornée  $f$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq 1} f(x) Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{|x| \leq 1} f(x) Y(x) \nu(dx).$$

De plus, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = a < 0$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $n$  assez grand et tout  $x \geq 1$ ,  $Y^n(x) \leq C$ , de sorte que 4. entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} f(x) Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{x \geq 1} f(x) Y(x) \nu(dx).$$

De même, par l'hypothèse 4., on a pour tout  $\eta > 0$  fixé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{m+\eta < x < -\epsilon} f(x) Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{m+\eta < x < -\epsilon} f(x) Y(x) \nu(dx). \quad (2.53)$$

Comme  $F_n(\beta_n) = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{x < m+\eta} (e^x - 1) Y^n(x) \nu_n(dx) &= -b_n - \frac{c_n}{2} - c_n \beta_n \\ &\quad - \int_{x > m+\eta} (e^x - 1) Y^n(x) - h(x) \nu_n(dx) + \int_{x < m+\eta} h(x) \nu_n(dx) \end{aligned}$$

et par les hypothèses 1., 2., 3., 4., on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x < m+\eta} (e^x - 1) Y^n(x) \nu_n(dx) = -F(a) + \int_{x < m+\eta} (e^x - 1) Y(x) - h(x) \nu(dx).$$

Finalement, par (2.53) et en faisant tendre  $\eta$  vers 0, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x < -\epsilon} Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{x < -\epsilon} Y(x) \nu(dx) + \frac{F(a)}{1 - e^m}$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^*} f(x) Y^n(x) \nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^*} f(x) \nu^{X+mL}(dx).$$

La convergence en loi (2.52) est donc vérifiée et on en déduit le Théorème 2.21.  $\square$

**Exemple 2.5** On considère le cas  $\gamma = -2$ , c'est-à-dire celui d'une divergence logarithmique. On suppose que  $X_t^n = -\frac{5}{2}t + W_t + J_t^n$  où  $W$  est un mouvement Brownien

standard et  $J^n$  est un processus de Lévy purement discontinu, de mesure de Lévy  $\nu_n(dx) = \frac{e^x}{n(e^x-1)} \mathbf{1}_{[\ln(\frac{3}{2}), \ln(2)]}(x)dx$ . On a alors

$$F^n(u) = -2 + u + \frac{1}{n} \int_{\ln(\frac{3}{2})}^{\ln(2)} \frac{e^x}{1 - u(e^x - 1)} dx$$

de sorte que  $F^n$  est continue et croissante sur  $] -\infty, 1[$  et

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} F^n(u) = -\infty \text{ et } \lim_{u \rightarrow 1} F^n(u) = +\infty.$$

Ainsi, il existe un unique  $\beta_n \in ] -\infty, 1[$  tel que  $F^n(\beta_n) = 0$ , et donc une mesure log-minimale. D'autre part, pour tout borélien  $A$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n(A) = 0$  et la suite de processus  $X^n$  converge donc en loi vers  $X_t = -\frac{5}{2}t + W_t$ . On a en particulier  $F(u) = -2 + u < 0$  pour tout  $u \leq 1$ . Donc, d'après le Théorème 2.21,

$$\mathcal{L}(X^n|Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X + \ln(2)L|\tilde{P})$$

où  $\tilde{P}$  est la mesure équivalente à  $P$  donnée par les paramètres de Girsanov  $(1, Y_1)$  et  $L$  est un processus de Poisson d'intensité 1 sous  $\tilde{P}$ , indépendant de  $X$ .

## 2.4 Continuité en $\gamma$ des prix associés aux mesures $f_\gamma$ -minimales

On considère maintenant un nouveau problème de continuité en lien avec le paragraphe précédent. On cherche en effet pour un modèle de Lévy fixé à étudier la continuité en  $\gamma$  des prix associés aux mesures  $f_\gamma$ -minimales. La question de la convergence de la densité des mesures  $f^q$ -minimales vers la mesure d'entropie relative a par exemple été considérée dans [43],[7]. On va ici s'intéresser plus généralement à des problèmes de continuité en  $\gamma$  et appliquer le Théorème 2.2 pour obtenir des résultats de convergence sur le prix des options. Cependant, avant de considérer ce problème, on détermine pour un modèle fixé la forme de l'ensemble des valeurs  $\gamma$  pour lesquelles une mesure  $f_\gamma$ -minimale existe.

### 2.4.1 Ensemble d'existence d'une mesure $f_\gamma$ -minimale

On a vu dans les sections précédentes que l'existence d'une mesure  $f_\gamma$ -minimale est liée à l'existence d'une solution pour une équation de la forme  $F_\gamma(u) = 0$  pour  $\gamma \neq -1$  et  $\hat{\psi}'(u) = 0$  pour  $\gamma = -1$ . Afin d'unifier les notations, on notera ici  $F_{-1}$  la fonction  $\hat{\psi}'$ . On commence par énoncer une condition nécessaire d'existence d'une mesure minimale qui découle des Propositions 2.7 et 2.12. On considère un processus de Lévy tel que  $\text{supp}(\nu) = \mathbb{R}$ . Il est donc en particulier non monotone.

**Lemme 2.22** *On suppose qu'il existe une mesure  $f_\gamma$ -minimale. Alors*

$$(\gamma + 1)F_{-1}(0) \leq 0.$$

*Preuve* S'il existe une mesure martingale  $f_\gamma$ -minimale  $Q$ , il doit nécessairement exister d'après les Proposition 2.7 ou 2.12 un réel  $\beta_\gamma$  tel que  $F_\gamma(\beta_\gamma) = 0$ . De plus, afin que  $Q$  soit équivalente à  $P$  on doit avoir  $Y_{\beta_\gamma} > 0$  ( $\nu$ -p.p) ce qui implique que

$\beta_\gamma(\gamma + 1) \geq 0$ , et donc, comme  $F_\gamma$  est croissante,  $(\gamma + 1)F_\gamma(0) \leq 0$ . On conclut en remarquant que pour tout  $\gamma$ ,  $F_\gamma(0) = F_{-1}(0)$ .  $\square$

Ceci implique en particulier qu'il ne peut pas exister à la fois une mesure  $f_\gamma$ -minimale pour un  $\gamma > -1$  et pour un  $\gamma < -1$ . On a également le résultat suivant.

**Proposition 2.23** *Si  $F_{-1}(0) = 0$ , la mesure initiale  $P$  est la mesure martingale  $f_\gamma$ -minimale pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ .*

*Si  $\lim_{u \rightarrow 0} F_{-1}(u) > 0$ , il existe un réel  $\gamma_0 < -1$  tel qu'une mesure martingale  $f_\gamma$ -minimale existe si et seulement si  $\gamma \in (\gamma_0, -1]$ .*

*Si  $\lim_{u \rightarrow 0} F_{-1}(u) < 0$ , soit il n'existe aucune mesure  $f_\gamma$ -minimale, soit il existe des réels  $\gamma_1 \geq \gamma_0 \geq -1$  tels qu'une mesure martingale  $f_\gamma$ -minimale existe si et seulement si  $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_1]$ .*

**Remarque.** Les notations  $(\gamma_0, -1]$  et  $(\gamma_0, \gamma_1]$  signifient ici qu'on ne peut pas se prononcer sur l'existence d'une mesure  $f_{\gamma_0}$ -minimale.

*Preuve* Si  $F_{-1}(0) = 0$ , la mesure initiale  $P$  vérifie

$$b + \frac{c}{2} + \int_{\mathbb{R}^*} (e^x - 1 - h(x))\nu(dx) = 0$$

et est donc une mesure martingale équivalente.  $P$  est donc la solution de tout problème de minimisation de  $f$ -divergence sur l'ensemble des mesures martingale équivalentes.

On suppose que  $\lim_{u \rightarrow 0} F_{-1}(u) > 0$ . Notons d'abord que comme  $X$  n'est pas monotone,  $\lim_{u \rightarrow -\infty} F_{-1}(u) < 0$  et par la Proposition 2.7, il existe une mesure d'entropie minimale. On note maintenant  $\gamma_1 = \inf\{\gamma < -1 : I(\gamma) < +\infty\}$  et on peut remarquer que  $\gamma_1 \leq -2$ . Alors, pour tout  $\gamma \in (\gamma_1, -1[$ , la fonction  $F_\gamma$  est bien définie et croissante sur  $[\frac{1}{\gamma+1}, 0]$ . De plus,  $\lim_{u \rightarrow 0^-} F_\gamma(u) = \lim_{u \rightarrow 0^-} F_{-1}(u) > 0$  et  $\lim_{\gamma \rightarrow -1} F_\gamma(\frac{1}{\gamma+1}) < 0$ . Ainsi, il existe  $\gamma_2$  tel que pour tout  $\gamma \in [\gamma_2, -1[$ ,  $F_\gamma(\frac{1}{\gamma+1}) \leq 0$ . On pose alors  $\gamma_0 = \sup(\gamma_1, \gamma_2)$ . Par la Proposition 2.12, il existe une mesure minimale si et seulement l'équation  $F_\gamma(u) = 0$  admet une solution, c'est-à-dire si et seulement si  $\gamma \in (\gamma_0, -1]$ .

Si on suppose maintenant que  $\lim_{u \rightarrow 0} F_{-1}(u) < 0$ , on a pour tout  $\gamma \leq -1$ ,  $\lim_{u \rightarrow 0} F_\gamma(u) < 0$  et comme les fonctions  $F_\gamma$  sont croissantes et définies sur  $[\frac{1}{\gamma+1}, 0]$ , il n'existe pas de solution à  $F_\gamma(u) = 0$ , et donc pas de mesure martingale  $f_\gamma$ -minimale. De plus, si pour tout  $\gamma > -1$ ,  $I(\gamma) = +\infty$ , il ne peut pas exister de mesure  $f_\gamma$ -minimale pour  $\gamma \geq -1$ . On suppose donc que  $\gamma_0 = \inf\{\gamma : I(\gamma) < +\infty\} < +\infty$  et on note que  $I(\gamma)$  est alors fini pour tout  $\gamma > \gamma_0$ . De plus, la fonction  $\gamma \mapsto F_\gamma(\frac{1}{\gamma+1})$  est décroissante et  $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} F_\gamma(\frac{1}{\gamma+1}) = F_{-1}(0) < 0$ . Ainsi, soit pour tout  $\gamma > \gamma_0$ ,  $F_\gamma(\frac{1}{\gamma+1}) < 0$  et il n'existe donc pas de mesure  $f_\gamma$ -minimale; soit au contraire il existe  $\gamma_1 \geq \gamma_0$  tel que  $F_{\gamma_1}(\frac{1}{\gamma_1+1}) = 0$ , et l'équation  $F_\gamma(u) = 0$  admet une racine, et donc une mesure  $f_\gamma$ -minimale si et seulement si  $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_1]$ .  $\square$

### 2.4.2 Continuité en $\gamma$ des prix

On s'intéresse maintenant au problème de la continuité par rapport à  $\gamma$  des prix associés aux mesures  $f_\gamma$ -minimales. Nous avons montré que ces mesures existent sur

un intervalle de la forme

$$I = (\gamma_0, -1], \text{ avec } \gamma_0 < -1 \text{ ou } I = (\gamma_0, \gamma_1], \text{ avec } \gamma_0 \geq -1.$$

On considère une option dont la fonction de payoff  $g$  est continue et vérifie (2.2). On note alors pour tout  $\gamma \in I$ ,  $\mathbb{C}_\gamma(g)$  le prix associé à la mesure martingale  $f_\gamma$ -minimale. On montre ici à partir du Théorème 2.2 la continuité de la fonction  $\mathbb{C}_\gamma(g)$  sur l'intervalle  $I$ .

**Théorème 2.24** *Soit  $g$  la fonction de payoff d'une option qui vérifie (2.2). Alors la fonction  $\gamma \mapsto \mathbb{C}_\gamma(g)$  est continue sur l'intervalle  $I$ . De plus, si  $I = ]\gamma_0, \gamma_1]$ , on a pour toute option dont le payoff est borné,*

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_0} \mathbb{C}_\gamma(g) = E_P[g(S)] \quad (2.54)$$

où  $P$  est la mesure initiale.

**Remarque 1.** On ne peut pas obtenir de même la limite des prix lorsque  $I$  est de la forme  $I = ]\gamma_0, -1]$ . Comme dans le paragraphe 2.3.3, la difficulté provient de ce que la fonction  $F_\gamma$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 2.** La limite (2.54) provient de ce que le processus  $X$  sous la mesure  $f_\gamma$ -minimale converge en loi vers  $X$  sous la mesure  $P$  lorsque  $\gamma$  tend vers  $\gamma_0$ . Il est en fait assez naturel que la mesure initiale  $P$  apparaisse. En effet, si  $\gamma_0 \notin I$ , alors  $I(\gamma_0) = +\infty$  et on peut montrer que dans ce cas, la  $f$ -divergence entre l'ensemble des mesures martingales et la mesure  $P$  est nulle. On montre ce résultat avant de donner la preuve du Théorème 2.24.

**Proposition 2.25** *Soit  $\gamma > -1$  tel que  $I(\gamma) = +\infty$ . On suppose que  $F_{-1}(0) < 0$ . Alors*

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{M}} f_\gamma(Q, P) = 0$$

*Preuve* En se basant sur une construction similaire à celle utilisée dans la preuve du Théorème 9 de [38], on obtient une suite de mesures martingales  $Q^n$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\gamma(Q^n, P) = 0$ . Pour cela, on considère la suite de fonctions  $\tilde{F}_\gamma^n$  définie par

$$\tilde{F}_\gamma^n(u) = b + \frac{c}{2} + cu + \int_{x \leq n} (e^x - 1) Y_{u, \gamma}(x) - h(x) \nu(dx) + \int_{x > n} (e^x - 1) \nu(dx).$$

Les fonctions  $\tilde{F}_\gamma^n$  sont continues, croissantes et vérifient  $\tilde{F}_\gamma^n(0) = F_{-1}(0) < 0$  et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \tilde{F}_\gamma^n(u) = +\infty$ . Il existe donc un unique réel  $\beta_n > 0$  tel que  $\tilde{F}_\gamma^n(\beta_n) = 0$ . On note alors  $Q^n$  la mesure absolument continue par rapport à  $P$  donnée par les paramètres de Girsanov  $(\beta_n, Y_n)$  où

$$Y_n(x) = \begin{cases} Y_{\beta_n, \gamma}(x) & \text{si } x \leq n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que pour tout  $u > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F}_\gamma^n(u) = +\infty$  ce qui implique  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$ . En particulier, on a pour  $n$  assez grand  $\beta_n < \frac{1}{\gamma+1}$  et donc  $Y_{\beta_n, \gamma} > 0$   $\nu$ -p.p. Ainsi

$Q^n$  définit une mesure équivalente à  $P$ . De plus, comme  $\tilde{F}_{\gamma_n}^n(\beta_n) = 0$ ,  $Q^n$  est une mesure martingale. Finalement, on rappelle que

$$f_\gamma(Q^n, P) = E[Z_T^{\gamma+2}] - 1 = \exp\left(T\left(\frac{\beta_n^2 c}{2} + \int_{\mathbb{R}^*} Y_n^{\gamma+2}(x) - 1 - (\gamma+2)(Y_n(x) - 1)\nu(dx)\right)\right) - 1.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$ , il nous faut montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^*} Y_n^{\gamma+2}(x) - 1 - (\gamma+2)(Y_n(x) - 1)\nu(dx) = 0.$$

Pour cela, on remarque d'abord que la fonction à intégrer est nulle pour  $x \geq n$ . Elle est de plus bornée au voisinage de  $-\infty$  et équivalente à  $\frac{(\gamma+2)(\gamma+1)}{2}x^2$  au voisinage de 0. Ainsi, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \leq 1} Y_n^{\gamma+2}(x) - 1 - (\gamma+2)(Y_n(x) - 1)\nu(dx) = 0.$$

De plus, pour tout  $n \geq 1$  et tout  $x \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} |Y_n^{\gamma+2}(x) - 1 - (\gamma+2)(Y_n(x) - 1)| &\leq (\gamma+2)(Y_n^{\gamma+1}(x) - 1)(Y_n(x) - 1) \\ &\leq (\gamma+2)\beta_n(e^x - 1)Y_n(x) \end{aligned}$$

Or, on rappelle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $F_\gamma(\beta_n) = 0$  de sorte que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{1 \leq x \leq n} (e^x - 1)Y_n(x)\nu_n(dx) \right| &= \left| -b - \frac{c}{2} - \int_{x \leq 1} (e^x - 1 - h(x))\nu(dx) \right. \\ &\quad \left. - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq n} (e^x - 1)\nu(dx) \right| < +\infty \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\gamma+2)\beta_n \int_{1 \leq x \leq n} Y_n^{\gamma+2}(x) - 1 - (\gamma+2)(Y_n(x) - 1)\nu(dx) = 0.$$

Finalement, on a bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\gamma(Q^n, P) = 0$$

de sorte que

$$\inf_{Q \in \mathcal{M}} f_\gamma(Q, P) = 0 \quad \square$$

On donne maintenant la preuve du Théorème 2.24. Celle-ci se fait en deux temps, en montrant d'abord la continuité de  $\mathbb{C}_\gamma(g)$  puis en étudiant la limite de la fonction lorsque  $\gamma$  tend vers  $\gamma_0$ .

*Preuve du Théorème 2.24* On fixe  $\gamma \in I$  et on considère une suite  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $I$  qui converge vers  $\gamma$ . On cherche à appliquer le Théorème 2.2 pour montrer la convergence de la suite  $\mathbb{C}_{\gamma_n}(g)$  vers  $\mathbb{C}_\gamma(g)$ . On note  $\beta_{\gamma_n}$  l'unique solution de l'équation  $F_{\gamma_n}(u) = 0$ . On rappelle que  $\beta_{\gamma_n} \in [\frac{1}{\gamma_n+1}, 0]$  si  $\gamma_n < -1$  et  $\beta_{\gamma_n} \in [0, \frac{1}{\gamma_n+1}]$  si  $\gamma_n > -1$ . On note de même  $\beta_\gamma$  la solution de l'équation  $F_\gamma(\beta_\gamma) = 0$ . On remarque alors que pour tout  $u \in ]\frac{1}{\gamma+1}, 0]$  si  $\gamma < -1$  ou  $[0, \frac{1}{\gamma+1}[$  si  $\gamma > -1$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\gamma_n}(u) = F_\gamma(u).$$

Comme les fonctions  $F_{\gamma_n}$  et  $F_\gamma$  sont croissantes, on peut en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_{\gamma_n} = \beta_\gamma.$$

Ainsi la condition i) du Théorème 2.2 est vérifiée. On cherche maintenant à vérifier la condition ii). Soit  $\epsilon > 0$  fixé. Les fonctions  $Y_{\gamma_n}$  sont uniformément bornées sur  $\{x < -\epsilon\}$  et on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \leq -\epsilon} Y_{\gamma_n}(x) \nu(dx) = \int_{x \leq -\epsilon} Y_\gamma(x) \nu(dx).$$

De plus, il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\gamma_n$  et tout  $x \geq \epsilon$ ,

$$Y_\gamma(x) \leq C e^{\frac{\bar{\gamma}+2}{\bar{\gamma}+1}x}$$

où  $\bar{\gamma} = \inf \gamma_n \in I$ . Comme  $\bar{\gamma} \in I$ , on doit avoir  $\int_{x \geq 1} e^{\frac{\bar{\gamma}+2}{\bar{\gamma}+1}x} \nu(dx) < +\infty$ . On en déduit que la famille  $(Y_{\gamma_n})_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable sur  $\{x \geq \epsilon\}$ , et donc que ii) est vérifiée. De plus, on rappelle que  $F_{\gamma_n}(\beta_{\gamma_n}) = 0$  de sorte que pour tout  $n$ ,

$$\int_{x \geq 1} (e^x - 1) Y_{\gamma_n}(x) \nu(dx) = -b - \frac{c}{2} - c\beta_n - \int_{x < 1} (e^x - 1) Y_{\gamma_n}(x) - h(x) \nu(dx).$$

On en déduit alors comme précédemment que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} (e^x - 1) Y_{\gamma_n}(x) \nu(dx) = \int_{x \geq 1} (e^x - 1) Y_\gamma(x) \nu(dx)$$

et les conditions d'application du Théorème 2.2 sont vérifiées. Ainsi, pour toute fonction de payoff qui vérifie (2.2),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_{\gamma_n}(g) = \mathbb{C}_\gamma(g).$$

On suppose maintenant que  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  converge par valeurs supérieures vers  $\gamma_0 > -1$  et que  $I(\gamma_0) = +\infty$ . Par le Lemme de Fatou, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq 1} e^{\frac{\gamma_n+2}{\gamma_n+1}x} \nu(dx) \geq \int_{x \geq 1} e^{\frac{\gamma_0+2}{\gamma_0+1}x} \nu(dx) = +\infty.$$

Ceci implique que pour tout  $u > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\gamma_n}(u) = +\infty$ . Comme les fonctions  $F_{\gamma_n}$  sont croissantes et que l'équation  $F_{\gamma_n}(u) = 0$  admet une unique solution positive  $\beta_n$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_{\gamma_n} = 0$ . Il reste à vérifier que la condition ii) du Théorème 2.2 est vérifiée avec  $Y_\gamma(x) = 1$ . Les fonctions  $Y_{\gamma_n}$  sont uniformément bornées sur  $\{x \leq -\epsilon\}$  de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \leq -\epsilon} Y_{\gamma_n}(x) \nu(dx) = \nu(\{x < -\epsilon\}).$$

De plus, on a pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{x \geq \epsilon} (e^x - 1) Y_{\gamma_n}(x) \nu(dx) \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| b + \frac{c}{2} - c\beta_n + \int_{x < \epsilon} (e^x - 1) Y_{\gamma_n}(x) - 1 - h(x) \nu(dx) \right| \\ &= \left| b + \frac{c}{2} + \int_{x < \epsilon} (e^x - 1 - h(x)) \nu(dx) \right| < +\infty \end{aligned}$$

On en déduit que la famille  $(Y_{\gamma_n})_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable sur  $\{x > \epsilon\}$  et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x \geq \epsilon} Y_{\gamma_n}(x) \nu(dx) = \nu(\{x \geq \epsilon\}).$$

Ainsi, la condition ii) est vérifiée et on peut appliquer la première partie du Théorème 2.2. On a donc pour toute fonction de payoff continue bornée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{C}_{\gamma_n}(g) = E_P[g(S)] \quad \square$$

## Chapitre 3

# Mesures martingales minimales et préservation de la propriété de Lévy

Un problème important dans l'étude d'un marché incomplet consiste dans le choix d'une des mesures martingales équivalentes. Nous avons déjà considéré dans le chapitre précédent quelques mesures obtenues par minimisation d'une certaine fonction convexe. Ces choix ont été étudiés pour l'entropie relative dans [29],[32],[38],[56], pour une  $f^q$ -divergence et pour une divergence logarithmique dans [33],[43],[16],[48]. Nous donnons ici une version unifiée de ces différents résultats. On rappelle que les fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$ ,  $a > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  regroupent, à un facteur affine près, les cas suivants :

- $\gamma = -2$  correspond à la divergence logarithmique.
- $\gamma = -1$  correspond à l'entropie relative.
- $\gamma \neq -1, -2$  correspond à une  $f^q$ -divergence.

On considère dans ce chapitre un processus de Lévy  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  défini sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ , où  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est complète et continue à droite. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 3.1** *Soit  $f$  une fonction vérifiant  $f''(x) = ax^\gamma$ ,  $a > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  et  $X$  un processus de Lévy de caractéristiques  $(b, c, \nu)$ . Il existe alors une mesure  $f$ -minimale  $Q^*$  si et seulement si il existe  $\beta^* \in \mathbb{R}^d$  tel que*

$$f'(Y^*(y)) > f'_+(0) (\nu - pp) \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^d \int_{|y| \geq 1} (e^{y_i} - 1) Y^*(y) \nu(dy) < +\infty \quad (3.2)$$

$$b + \frac{1}{2} \text{diag}(c) + c\beta^* + \int_{\mathbb{R}^{d*}} ((e^y - 1)Y^*(y) - h(y)) \nu(dy) = 0 \quad (3.3)$$

où  $Y^*(y) = (f')^{-1}(f'(1) + \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)}(e^{y_i} - 1))$ . Les paramètres de Girsanov associés à  $Q^*$  sont alors  $\beta^*$  et  $Y^*$ . En particulier,  $Q^*$  préserve la propriété de Lévy et est indépendante de l'intervalle de temps considéré.



On montrera ce théorème dans la section 3.3.7. On rappelle que de façon générale, la densité d'une mesure martingale est de la forme  $Z = \mathcal{E}(N)$ , où

$$N = \sum_{i=1}^d \int_0^\cdot \beta_s^{(i)} dX_s^{(c),i} + \int_0^\cdot \int_{\mathbb{R}^{d*}} (Y_s(y) - 1)(\mu^X - \nu(dy)) ds$$

et où  $\beta$  et  $Y$  vérifient presque sûrement, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$b + \frac{1}{2} \text{diag}(c) + c\beta_t + \int_{\mathbb{R}^{d*}} ((e^y - 1)Y_t(y) - h(y))\nu(dy) = 0.$$

De plus, cette mesure préserve la propriété de Lévy si et seulement si  $\beta$  et  $Y$  sont déterministes et indépendants du temps. On rappelle également que  $\mathcal{M}$  désigne l'ensemble des mesures martingales équivalentes associées au processus de Lévy  $X$  et que  $\mathcal{M}'$  désigne le sous-ensemble de  $\mathcal{M}$  formé des mesures martingales qui préservent la propriété de Lévy.

Dans le cas de l'entropie relative, il a été noté dans [29] qu'on peut associer à toute mesure martingale équivalente  $Q$  une mesure martingale  $\bar{Q}$ , qui préserve la propriété de Lévy et telle que  $f(\bar{Q}||P) \leq f(Q||P)$ . Ainsi, la mesure minimale, lorsqu'elle existe, préserve la propriété de Lévy. Ce résultat a également été montré pour les fonctions  $f(x) = x^q$ ,  $f(x) = -\ln(x)$  dans [49]. Le but principal de ce chapitre est d'étudier sous certaines conditions d'intégrabilité l'ensemble des fonctions convexes régulières qui préservent la propriété de Lévy. Nous verrons en particulier que pour la plupart des modèles de Lévy exponentiels, cette propriété est spécifique aux fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$ . On a plus précisément le résultat suivant :

**Théorème 3.2** *Soit  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement convexe de classe  $\mathcal{C}^3$  et  $X$  un processus de Lévy de caractéristiques  $(b, c, \nu)$  tel que  $c$  est inversible ou tel que  $\text{supp}(\nu)$  est d'intérieur non-vide. On suppose qu'il existe une mesure martingale équivalente  $f$ -minimale  $Q^*$  sur l'intervalle  $[0, T]$ , de densité  $Z^*$  qui préserve la propriété de Lévy et vérifie pour tout  $x > 0$  et tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ ,*

$$E_{Q^*}[|f'(xZ_T^*)|] < +\infty, \quad \sup_{t \leq T} \sup_{x \in K} E_{Q^*}[f''(xZ_t^*)Z_t^*] < +\infty \quad (3.4)$$

*Alors il existe  $a > 0$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x \in \text{supp}(Z_T^*)$ ,*

$$f''(x) = ax^\gamma.$$

*De plus, si  $Q^*$  est minimale pour tout intervalle de temps  $[0, T]$ , alors  $f''(x) = ax^\gamma$  pour tout  $x > 0$ .*

Les conditions imposées sur  $c$  et  $\nu$  peuvent sembler restrictives. Elles sont essentiellement techniques et apparaîtront au cours de la preuve dans l'application du Lemme 3.16. L'exemple développé dans la section 3.3.8 montre que le résultat n'est plus vérifié si  $c$  n'est pas inversible.

Le chapitre s'organise de la façon suivante. Dans la section 3.1, on rappelle les résultats connus concernant les mesures minimales associées à des fonctions strictement convexes. Dans la section 3.2, on étudie pour deux modèles élémentaires la mesure minimale associée à une fonction strictement convexe  $f$ . On obtient ainsi des

exemples de fonctions pour lesquels une mesure minimale existe, mais ne préserve pas la propriété de Lévy. La section 3.3 est la partie centrale du chapitre : on y énonce et démontre le résultat principal concernant la préservation de la propriété de Lévy. Finalement, dans la section 3.5, on s'intéresse à l'application de ces résultats pour la détermination de stratégies optimales.

### 3.1 $f$ -divergences et mesures minimales

On rappelle ici quelques résultats connus concernant des problèmes de minimisation sur l'espace  $\mathcal{M}$  des mesures martingales équivalentes. On commence par donner la définition d'une  $f$ -divergence :

**Définition 3.3** Soit  $P$  et  $Q$  deux mesures de probabilité telles que  $Q \ll P$  et soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement convexe. La  $f$ -divergence de  $Q$  par rapport à  $P$  est définie de la façon suivante :

$$f(Q||P) = \begin{cases} E[f(\frac{dQ}{dP})] & \text{si } E[|f(\frac{dQ}{dP})|] < +\infty \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Les  $f$ -divergences les plus couramment utilisées sont l'entropie relative,  $f(x) = x \ln(x)$ , les  $f^q$ -divergences,  $f(x) = x^q$ ,  $q < 0$  ou  $q > 1$  et la divergence logarithmique,  $f(x) = -\ln(x)$ . On peut également mentionner les fonctions de la forme  $f(x) = (1 - x^q)^{\frac{1}{q}}$ ,  $0 < q < 1$  et les combinaisons linéaires à coefficients positifs de toutes ces fonctions.

On s'intéresse au problème de minimisation suivant.

**Définition 3.4** Une mesure  $Q^* \in \mathcal{M}$  est dite  $f$ -minimale sur l'intervalle  $[0, T]$  si

$$f(Q_T^*||P_T^*) = \inf_{Q \in \mathcal{M}} f(Q_T||P_T)$$

Notons que comme  $f$  est strictement convexe, la fonction  $Q \mapsto f(Q||P)$  est elle-même strictement convexe, de sorte que la mesure minimale, si elle existe, est unique.

On commence par rappeler une condition nécessaire d'existence d'une mesure  $f$ -minimale, tirée de [34]. Ce résultat s'applique pour des modèles de semimartingales généraux et donc en particulier pour des modèles de Lévy exponentiels.

On introduit pour cela le sous-ensemble suivant de  $\mathcal{M}$  :

$$\mathcal{K} = \{Q \in \mathcal{M}, \text{ telles que } f(Q||P) < +\infty \text{ et } E_Q[|f'(\frac{dQ}{dP})|] < +\infty\}$$

**Théorème 3.5 (cf [34], Th3.1)** Soit  $Q^* \in \mathcal{K}$ . Alors, si  $Q^*$  est une mesure  $f$ -minimale sur  $[0, T]$ ,

$$f'(\frac{dQ_T^*}{dP_T}) = x + (\phi \cdot S)_T Q^* - p.s \quad (3.5)$$

où  $x \in \mathbb{R}$  et  $\phi$  est un processus prévisible tel que  $\phi \cdot S$  est une martingale sous  $Q^*$ .

On rappelle que  $(\phi \cdot S)$  désigne l'intégrale stochastique vectorielle de  $\phi$  par rapport à  $S$ . Il est intéressant de pouvoir remplacer la condition  $Q^* \in \mathcal{K}$  par  $Q^* \in \mathcal{M}$ . Ceci est possible pour une certaine classe de fonctions :

**Lemme 3.6** (cf [53], Lemme 8.7) *Soit  $f$  une  $f$ -divergence. On suppose que pour tout  $c > 1$  il existe des constantes positives  $c_0, c_1, c_2, c_3$  telles que pour tout  $u > c_0$ ,*

$$f(cu) \leq c_1 f(u) + c_2 u + c_3. \quad (3.6)$$

*Alors un élément de  $\mathcal{M}$  qui est  $f$ -minimal appartient nécessairement à  $\mathcal{K}$ .*

En particulier, tous les exemples de fonctions mentionnés précédemment vérifient la propriété (3.6).

La condition (3.5) du Théorème 3.5 nous permettra d'obtenir des conditions nécessaires qui doivent être vérifiées par les mesures  $f$ -minimales. On donne maintenant une condition nécessaire et suffisante que nous utiliserons essentiellement pour vérifier que des candidats définissent effectivement des mesures minimales :

**Théorème 3.7** ([34], Th 2.2) *Soit  $Q^* \in \mathcal{M}$  telle que  $f(Q^*||P) < +\infty$ . Alors  $Q^*$  est  $f$ -minimale si et seulement si pour toute mesure  $Q \in \mathcal{M}$  telle que  $f(Q||P) < +\infty$ ,*

$$E_Q \left[ f' \left( \frac{dQ^*}{dP} \right) \right] \geq E_{Q^*} \left[ f' \left( \frac{dQ^*}{dP} \right) \right].$$

Nous avons déjà cité dans le chapitre précédent un résultat de [38] donnant des conditions nécessaires et suffisantes d'existence pour une mesure minimale dans le cas de l'entropie relative (Proposition 2.7). On rappelle également le résultat de [43] dans le cadre des mesures  $f^q$ -minimales :

**Proposition 3.8** ([43], Th.2.9) *On suppose que  $f(x) = x^q$ , avec  $q > 1$  ou  $q < 0$ . Alors, si il existe  $\beta^* \in \mathbb{R}^d$  tel que*

$$1 + (q - 1) \sum_{i=1}^d \beta^{*i} (e^{y_i} - 1) > 0 \quad (\nu - p.p),$$

$$\sum_{i=1}^d \int_{|y| \geq 1} (e^{y_i} - 1) \left( 1 + (q - 1) \sum_{j=1}^d \beta^{*(j)} (e^{y_j} - 1) \right)^{\frac{1}{q-1}} \nu(dy) < +\infty,$$

$$b + \frac{1}{2} \text{diag}(c) + c\beta^* + \int_{\mathbb{R}^{d*}} \left( (e^y - 1) \left( 1 + (q - 1) \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)} (e^{y_i} - 1) \right)^{\frac{1}{q-1}} - h(y) \right) \nu(dy) = 0,$$

*il existe une mesure  $f$ -minimale et ses paramètres de Girsanov sont  $\beta^*$  et  $Y^*(y) = (1 + (q - 1) \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)} (e^{y_i} - 1))^{\frac{1}{q-1}}$ .*

En particulier, dans ces différents cas, les paramètres de Girsanov de la mesure minimale sont déterministes et ne dépendent pas du temps, de sorte que par le Théorème 1.18, la mesure minimale  $Q^* \in \mathcal{M}'$ . Les exemples développés dans la section suivante montrent cependant qu'il ne s'agit pas d'une propriété générale.

### 3.2 Etude de deux modèles élémentaires

Avant de nous intéresser plus précisément au problème de la préservation de la propriété de Lévy, on étudie pour deux modèles de Lévy unidimensionnels simples, l'existence d'une mesure minimale associée à une  $f$ -divergence quelconque. Ceci donnera en particulier des exemples de mesures minimales qui ne préservent pas la propriété de Lévy.

**Proposition 3.9** *On suppose que  $X_t = cW_t + aJ_t$  où  $W$  est un mouvement Brownien,  $J$  un processus de Poisson,  $c > 0$  et  $-\frac{c}{2} < a < 0$ . Alors il existe une mesure  $f$ -minimale pour toute  $f$ -divergence de classe  $\mathcal{C}^3$ .*

*Preuve* Dans ce modèle, par le Théorème 1.18, une mesure  $Q$  appartient à  $\mathcal{M}$  si ses paramètres de Girsanov vérifient l'équation

$$a + \frac{c}{2} + c\beta_s + (e^a - 1)Y_s(a) = 0.$$

Par une application directe de la formule d'Itô, la  $f$ -divergence de  $Q$  par rapport à  $P$  vaut alors

$$E_P[f(Z_T)] = \int_0^T E_P \left[ \frac{c}{2} f''(Z_{s-}) Z_{s-}^2 \beta_s^2 + f(Z_{s-} Y(\beta_s)) - f(Z_{s-}) - f'(Z_{s-}) Z_{s-} (Y(\beta_s) - 1) \right] ds$$

où  $Y(u) = \frac{-a - \frac{c}{2} - cu}{e^a - 1}$ . Afin de minimiser la fonction sous l'intégrale, on introduit pour un réel  $z > 0$  fixé, la fonction  $\psi_z$  définie sur  $]-\frac{a}{c} - \frac{1}{2}, +\infty[$  par

$$\psi_z := u \mapsto \frac{c}{2} f''(z) z^2 u^2 + f(zY(u)) - f(z) - f'(z) z (Y(u) - 1).$$

La fonction  $\psi_z$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  relativement à  $u$ , strictement convexe et

$$\psi'_z(u) = cf''(z) z^2 u + \frac{cz}{1 - e^a} [f'(zY(u)) - f'(z)].$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -\frac{a}{c} - \frac{1}{2}} \psi'_z(u) &= -(a + \frac{c}{2}) f''(z) z^2 + \frac{cz}{1 - e^a} \lim_{u \rightarrow 0} (f'(u) - f'(z)) < 0, \\ \psi'_z(\frac{1 - e^a}{c}) &= (1 - e^a) f''(z) z + \frac{cz}{1 - e^a} (f'(z \frac{a + \frac{c}{2} + 1 - e^a}{1 - e^a}) - f'(z)) > 0. \end{aligned}$$

Il existe donc un unique réel  $u = \eta(z) \in ]-\frac{a}{c} - \frac{1}{2}, 0[$  qui minimise  $\psi_z$ . De plus, la fonction  $(z, u) \mapsto \psi'_z(u)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et pour tout  $u > -\frac{a}{c} - \frac{1}{2}$ , pour tout  $z > 0$ , on a

$$\frac{d}{du} \psi'_z(u) = cf''(z) z^2 + \frac{c^2}{(e^a - 1)^2} z^2 f''(zY(u)) > 0.$$

Donc par le théorème des fonctions implicites,  $\eta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . On introduit alors pour tout  $n \geq 1$ , la fonction  $\eta^{(n)}$  définie par

$$\eta^{(n)}(x) = \begin{cases} \eta(\frac{1}{n}) & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ \eta(x) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq n \\ \eta(n) & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

qui est continue et bornée. On considère alors l'équation différentielle stochastique

$$dZ_s^{(n)} = Z_{s-}^{(n)} \eta^{(n)}(Z_{s-}^{(n)}) cdW_s + aZ_{s-}^{(n)} \left( Y(\eta^{(n)}(Z_{s-}^{(n)})) - 1 \right) d(J_s - s). \quad (3.7)$$

La fonction  $\eta^{(n)}$  est continue et bornée. De plus, il existe une constante  $K_n$  telle que pour tout  $0 \leq x, y \leq n$ ,

$$|x\eta^{(n)}(x) - y\eta^{(n)}(y)| + |xY(\eta^{(n)}(x)) - yY(\eta^{(n)}(y))| \leq K_n|x - y|$$

$$|x\eta^{(n)}(x)|^2 + |Y(\eta^{(n)}(x))x|^2 \leq K_n(1 + |x|^2).$$

L'équation (3.7) admet donc une unique solution forme  $Z^{(n)}$ . On note alors  $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : Z_{s-}^{(n)} \geq n \text{ ou } Z_{s-}^{(n)} \leq \frac{1}{n}\}$ , avec  $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ . Notons que pour  $m \geq n$ , le processus  $Z_{\cdot \wedge \tau_n}^{(m)}$  vérifie (3.7), de sorte que le processus

$$Z_t^* = \sum_{n=1}^{+\infty} Z_t^{(n)} \mathbf{1}_{\{\tau_n < t \leq \tau_{n+1}\}}$$

est bien défini sur l'intervalle stochastique  $[0, \tau]$  où  $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ . Or, comme pour tout  $z > 0$ ,  $Y(z) - 1 > 0$ , on a  $\tau = +\infty$  p.s. De plus, par recollement des solutions des équations (3.7),  $Z^*$  est solution de l'équation

$$dZ_t = Z_{t-} \eta(Z_{t-}) cdW_t + a(Y(\eta(Z_{t-})) - 1) Z_{t-} d(J_t - t).$$

$Z^*$  est alors la densité d'une mesure équivalente à  $P$ . Comme

$$b + \frac{c}{2} + c\eta(z) + (e^a - 1) \frac{-a - \frac{c}{2} - c\eta(z)}{e^a - 1} = 0,$$

il s'agit d'une mesure martingale équivalente, et par définition de la fonction  $\eta$ ,  $Z^*$  minimise  $E[f(Z_T^*)]$  sur l'ensemble des mesures martingales équivalentes.  $\square$

**Proposition 3.10** *On suppose que  $X_t = a(J_t^{(1)} - t) - b(J_t^{(2)} - t) + dt$  où  $J^{(1)}$  et  $J^{(2)}$  sont deux processus de Poisson indépendants,  $a, b > 0$  et  $0 < d < 1 - e^{-b}$ . Alors il existe une mesure  $f$ -minimale pour toute  $f$ -divergence de classe  $\mathcal{C}^3$ .*

*Preuve* Dans ce cas, par le Théorème 1.18, le paramètre de Girsanov  $Y$  d'une mesure martingale  $Q$  doit vérifier pour tout  $s \leq T$ ,

$$d + (e^a - 1)Y_s(a) + (e^{-b} - 1)Y_s(-b) = 0.$$

La  $f$ -divergence de  $Q$  par rapport à  $P$  vaut alors

$$E_P[f(Z_T)] = \int_0^T E_P[f(Z_{s-}Y_s(a)) - f(Z_{s-}) - f'(Z_{s-})Z_{s-}(Y_s(a) - 1) \\ + f(Z_{s-}v(Y_s(a))) - f'(Z_{s-})Z_{s-}(v(Y_s(a)) - 1)] ds$$

où  $v(u) = \frac{d+(e^a-1)u}{1-e^{-b}}$ . On associe alors à tout  $z > 0$ , la fonction  $\psi_z$  définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par

$$\psi_z(u) = f(zu) - f(z) - f'(z)z(u - 1) + f(zv(u)) - f(z) - f'(z)z(v(u) - 1).$$

$\psi_z$  est alors de classe  $\mathcal{C}^2$ , strictement convexe, et sa dérivée est donnée par

$$\psi'_z(u) = z(f'(zu) - f'(z)) + \frac{z(e^a - 1)}{1 - e^{-b}}(f'(zv(u)) - f'(z))$$

On a alors

$$\lim_{u \rightarrow 0} \psi'_z(u) < 0 \text{ et } \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi'_z(u) > 0.$$

Il existe donc un unique élément  $\eta(z)$  tel que  $\psi'_z(\eta(z)) = 0$ . On montre alors comme dans le modèle précédent que l'équation différentielle stochastique

$$dZ_s = a(\eta(Z_{s-}) - 1)d(J_s^{(1)} - s) - b(v(\eta(Z_{s-})) - 1)d(J_s^{(2)} - s)$$

admet une unique solution forte  $Z^*$  qui est la densité de la mesure martingale  $f$ -minimale.  $\square$

**Exemple.** On considère la fonction  $f(x) = 3x^2 + 4x^3$  définie sur  $\mathbb{R}^{++}$  et  $X$  un processus de Lévy de la forme

$$X_t = \ln\left(\frac{3}{2}\right)(J_t^{(1)} - t) - \ln(2)(J_t^{(2)} - t) + t$$

où  $J^{(1)}$  et  $J^{(2)}$  sont des processus de Poisson indépendants. Par la proposition 3.10, il existe une mesure  $f$ -minimale de densité  $Z^*$ . On cherche dans cet exemple à calculer explicitement les paramètres de Girsanov de cette mesure. Il nous faut pour cela déterminer la solution de l'équation  $\psi'_z(u) = 0$ . On a

$$\psi'_z(u) = z(2zu^2 + 2(1+z)u - 1 - z)$$

et  $\psi'_z(u) = 0$  admet une unique solution positive  $\eta(z) = \frac{\sqrt{1+z}}{2z}(\sqrt{1+3z} - \sqrt{1+z})$ . On déduit donc de la proposition 3.10 que les paramètres de Girsanov de  $Z^*$  sont

$$Y_s(\ln(\frac{3}{2})) = \frac{\sqrt{1+z}}{2z}(\sqrt{1+3z} - \sqrt{1+z}) \text{ et } Y_s(-\ln(2)) = 1 + \frac{\sqrt{1+z}}{2z}(\sqrt{1+3z} - \sqrt{1+z}).$$

En particulier, ces paramètres ne sont pas déterministes mais sont des fonctions non constantes de  $Z_{s-}^*$ . Donc, par le Théorème 1.18, la mesure minimale  $Q^*$  associée ne préserve pas la propriété de Lévy bien que  $f$  soit combinaison linéaire de fonctions qui préservent la propriété de Lévy.

### 3.3 Préservation de la propriété de Lévy

Nous avons vu que la préservation de la propriété de Lévy par une mesure  $f$ -minimale n'est pas une propriété générale mais qu'elle est vérifiée par certaines fonctions couramment utilisées, notamment  $f(x) = x \ln(x)$ ,  $f(x) = \frac{x^q}{q}$  ou  $f(x) = -\ln(x)$ . On cherche ici à déterminer pour un modèle de Lévy très général les  $f$ -divergences qui préservent la propriété de Lévy.

Avant d'énoncer le théorème principal, on rappelle le cadre considéré : si la mesure initiale  $P$  est elle-même une mesure martingale, elle sera bien sûr  $f$ -minimale pour toute divergence et tout intervalle de temps considéré. On suppose donc dans cette partie que  $P \notin \mathcal{M}$ . De plus, la recherche d'une mesure  $f$ -minimale n'a d'intérêt que

si  $\mathcal{M}$  est non-vidé et non réduit à un seul élément. On considère un processus de Lévy  $X$  fixé à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , de caractéristiques  $(b, c, \nu)$ , qui définit un marché incomplet. On rappelle que par le Théorème 1.22, ces conditions sont équivalentes à supposer que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- i)  $\text{Card}(\text{supp}(\nu)) > k$ , où  $k$  est la dimension du noyau de  $c$ .
- ii) Il existe  $x \in \text{supp}(\nu)$  tel que  $c(e^x - 1) \neq 0$ .

On rappelle l'énoncé du théorème principal :

**Théorème 3.2** *Soit  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe de classe  $\mathcal{C}^3$  et  $X$  un processus de Lévy de caractéristiques  $(b, c, \nu)$  tel que  $c$  est inversible ou tel que  $\text{supp}(\nu)$  est d'intérieur non-vidé. On suppose qu'il existe une mesure  $f$ -minimale  $Q^*$  sur l'intervalle  $[0, T]$ , de densité  $Z^*$ , qui préserve la propriété de Lévy et vérifie pour tout  $x > 0$  et tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ ,*

$$E_{Q^*}[|f'(xZ_T^*)|] < +\infty, \quad \sup_{t \leq T} \sup_{x \in K} E_{Q^*}[f''(xZ_t^*)Z_t^*] < +\infty \quad (3.8)$$

Alors il existe  $a > 0$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x \in \text{supp}(Z_T^*)$ ,

$$f''(x) = ax^\gamma.$$

De plus, si  $Q^*$  est minimale pour tout intervalle de temps  $[0, T]$ , alors  $f''(x) = ax^\gamma$  pour tout  $x > 0$ .

**Remarque 1.** Si on considère des combinaisons linéaires de fonctions vérifiant  $f''(x) = ax^\gamma$ , ou bien les fonctions de la forme  $f(x) = (1 - x^q)^{\frac{1}{q}}$  avec  $q \neq \frac{1}{2}$ , il est facile de voir qu'elles vérifient (3.6). Ainsi, par le Lemme 3.6, une mesure minimale, si elle existe, appartient nécessairement à  $\mathcal{K}$ . On montrera de plus au Lemme 3.14 qu'une telle mesure vérifie également la condition d'intégrabilité sur  $f''$ . Ainsi, pour chacune de ces fonctions, s'il existe une mesure minimale, elle ne préservera pas la propriété de Lévy.

**Remarque 2.** L'égalité  $f''(x) = ax^\gamma$  est obtenue pour  $x \in \text{supp}(Z_T^*)$ . On déterminera plus explicitement dans le Lemme 3.19 la forme de cet ensemble. On verra en particulier que pour les modèles les plus utilisés, il s'agit de  $\mathbb{R}^{+*}$ .

L'essentiel de cette section est constituée de la preuve du Théorème 3.2. Elle s'organise de la façon suivante :

La première étape consiste à obtenir une équation qui doit être vérifiée par la densité d'une mesure martingale minimale si celle-ci préserve la propriété de Lévy. Pour cela :

section 3.3.1 : On commence par montrer des lemmes d'intégrabilité sur la densité des mesures  $Q \in \mathcal{M}'$  qui vérifient les conditions d'intégrabilité (3.8).

section 3.3.2 : Par une application de la formule d'Itô, on obtient une décomposition pour les densités des mesures  $Q \in \mathcal{M}'$  qui vérifient les conditions (3.8).

section 3.3.3 : En identifiant cette décomposition avec la condition nécessaire du Théorème 3.5 pour les mesures martingales minimales, on obtient une équation vérifiée presque sûrement par la densité de la mesure minimale.

section 3.3.4 : Afin de pouvoir exploiter l'équation obtenue, on détermine le support de la loi de la densité de la mesure minimale.

On montre dans un deuxième temps que pour les différents modèles considérés, l'équation sur la densité ne peut être vérifiée que si  $f''(x) = ax^\gamma$ .

section 3.3.5 : 1er cas :  $\text{supp}(\nu)$  est d'intérieur non-vide.

section 3.3.6 : 2e cas : la matrice  $c$  est inversible.

section 3.3.7 : On considère finalement les fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$  et on montre le Théorème 3.1. Ce résultat n'est pas nouveau (cf. les propositions 2.7 et 3.8), mais on donne ici une version unifiée des différents cas.

section 3.3.8 : On termine cette partie en donnant un exemple de modèle pour lequel la matrice  $c$  n'est pas inversible et on obtient une fonction  $f$  qui préserve la propriété de Lévy bien que  $f''(x) \neq ax^\gamma$ .

### 3.3.1 Lemmes préparatoires

On commence par donner un premier lemme qui sera utilisé plusieurs fois dans la suite du chapitre lorsqu'il sera nécessaire de localiser différents processus.

**Lemme 3.11** *Soit  $Q$  une mesure martingale équivalente appartenant à  $\mathcal{M}'$  de paramètres de Girsanov  $(\beta, Y)$ . Alors*

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : Y(\Delta X_t) \geq n \text{ ou } Y(\Delta X_t) \leq \frac{1}{n}\}, \quad (3.9)$$

avec  $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ , définit une suite de temps d'arrêt qui tend presque sûrement vers  $+\infty$ .

*Preuve* On définit pour tout  $n \geq 1$  le borélien

$$B_n = \{y \in \mathbb{R}^{d*} : Y(y) \geq n \text{ ou } Y(y) \leq \frac{1}{n}\}.$$

On rappelle que pour tout borélien  $B$  qui vérifie  $\nu(B) < +\infty$ ,  $T_B = \inf\{t \geq 0, \Delta X_t \in B\}$  définit un temps d'arrêt. On montre donc que pour tout  $n \geq 2$ ,  $\nu(B_n) < +\infty$ . Comme  $Q$  est équivalente à  $P$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^{d*}} (\sqrt{Y(y)} - 1)^2 \nu(dy) < +\infty.$$

On a alors

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}^{d*}} (\sqrt{Y(y)} - 1)^2 \mathbf{1}_{\{y \in B_n\}} \nu(dy) \geq (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^2 \nu(B_n)$$

et donc en particulier  $\nu(B_n) < +\infty$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_n$  est un temps d'arrêt et la suite  $(T_n)_{n \geq 1}$  est de plus croissante. De plus,  $(B_n)_{n \geq 1}$  définit une suite décroissante de boréliens et  $\bigcap_{n \geq 1} B_n = \emptyset$ . Donc par continuité de la mesure  $\nu$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(B_n) = 0$ . On a alors pour tout  $t \geq 0$ ,

$$P(T_n \leq t) = P(\text{card}\{s \leq t, \Delta X_s \in B_n\} \geq 1) \leq t\nu(B_n)$$

et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq t) = 0$ . Comme  $(T_n)_{n \geq 1}$  est une suite croissante, on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$  p.s.  $\square$



**Lemme 3.12** *Soit  $Z$  la densité d'une mesure  $Q \in \mathcal{M}'$ . Alors  $\ln(Z)$  est un processus de Lévy sous  $P$  et sous  $Q$ .*

*Preuve* On rappelle que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \ln(Z_t) &= \sum_{i=1}^d \beta^{(i)} X_t^{(c),i} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} \ln(Y(y)) (\mu^X - \nu(dy)) ds \\ &\quad - t \left[ \frac{\top \beta c \beta}{2} + \int_{\mathbb{R}^{d*}} Y(y) - 1 - \ln(Y(y)) \nu(dy) \right] \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout  $t \geq 0$  et tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(z) \leq 1$ , on a  $E[e^{z \ln(Z_t)}] = e^{t \psi^{\ln(Z)}(z)}$ , avec

$$\begin{aligned} \psi^{\ln(Z)}(z) &= -z \left( \frac{\top \beta c \beta}{2} + \int_{\mathbb{R}^{d*}} Y(y) - 1 - \ln(Y(y)) \nu(dy) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \top \beta c \beta z^2 + \int_{\mathbb{R}^{d*}} e^{z \ln(Y(y))} - 1 - z h(\ln(Y(y))) \nu(dy) \end{aligned}$$

Ainsi,  $\ln(Z)$  est un processus de Lévy à valeurs réelles sous  $P$  de caractéristiques

$$\begin{cases} b^{\ln(Z)} = -\frac{\top \beta c \beta}{2} - \int_{\mathbb{R}^{d*}} Y(y) - 1 - \ln(Y(y)) \nu(dy) \\ c^{\ln(Z)} = \top \beta c \beta \\ \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^{d*}} \mathbf{1}_{\{\ln(Y(y)) \in A\}} \nu(dy), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

De plus, en remarquant que pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $E_Q[e^{iu \ln(Z_t)}] = E_P[e^{(iu+1) \ln(Z_t)}]$ , on obtient que  $\ln(Z)$  est également un processus de Lévy sous  $Q$ , de caractéristiques

$$\begin{cases} b^{\ln(Z),Q} = \frac{\top \beta c \beta}{2} + \int_{\mathbb{R}^{d*}} Y(y) h(\ln(Y(y))) - (Y(y) - 1) \nu(dy) \\ c^{\ln(Z),Q} = \top \beta c \beta \\ \nu^{\ln(Z),Q}(A) = \int_{\mathbb{R}^{d*}} \mathbf{1}_{\{\ln(Y(y)) \in A\}} Y(y) \nu(dy), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{cases} \quad \square$$

On montre maintenant deux lemmes d'intégrabilité pour la densité des mesures  $Q \in \mathcal{M}'$ .

**Lemme 3.13** *Soit  $Z$  la densité d'une mesure  $Q \in \mathcal{M}'$  telle que pour tout  $x > 0$ ,  $E_Q[|f'(xZ_T)|] < +\infty$ . Alors pour tout temps d'arrêt  $\tau$  à valeurs dans  $[0, T]$  et tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ ,*

$$\sup_{x \in K} E[|f(xZ_\tau)|] < +\infty, \quad \sup_{x \in K} E_Q[|f'(xZ_\tau)|] < +\infty, \quad \sup_{x \in K} E_Q[|f'(x \frac{Z_T}{Z_\tau})|] < +\infty$$

De plus, pour toute suite de temps d'arrêt  $(T_n)_{n \geq 1}$  tendant vers  $+\infty$  et tout  $t \leq T$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_Q[f'(xZ_{t \wedge T_n})] = E_Q[f'(xZ_t)] \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E_P[f(xZ_{t \wedge T_n})] = E_P[f(xZ_t)] \quad (3.10)$$

**Remarque.** On peut déjà noter que comme  $f'$  est croissante, la condition  $E_Q[|f'(xZ_T)|] < +\infty$ ,  $x > 0$ , entraîne sur tout compact  $K$ ,  $\sup_{x \in K} E_Q[|f'(xZ_T)|] < +\infty$ .

*Preuve* Soit  $\tau$  un temps d'arrêt à valeurs dans  $[0, T]$  et  $x > 0$ . On suppose que  $E_Q[|f'(xZ_\tau)|] = +\infty$ . Comme  $f'$  est croissante, ceci implique qu'il existe  $A > 0$  tel que

$$E_Q[f'(xZ_\tau)\mathbf{1}_{\{Z_\tau > A\}}] = +\infty \text{ ou } E_Q[f'(xZ_\tau)\mathbf{1}_{\{Z_\tau < \frac{1}{A}\}}] = -\infty.$$

On suppose par exemple que  $E_Q[f'(xZ_\tau)\mathbf{1}_{\{Z_\tau > A\}}] = +\infty$ . Comme la mesure  $Q$  préserve la propriété de Lévy, par le Lemme 3.12,  $\ln(Z)$  est un processus de Lévy sous  $Q$ , de sorte que les variables aléatoires  $\ln(Z_\tau)$  et  $\ln(Z_T) - \ln(Z_\tau)$  sont indépendantes sous  $Q$ . Ainsi,  $Z_\tau$  et  $\frac{Z_T}{Z_\tau}$  sont également indépendantes sous  $Q$ . On écrit alors

$$E_Q[|f'(xZ_T)|\mathbf{1}_{\{Z_\tau > A\}}\mathbf{1}_{\{\frac{Z_T}{Z_\tau} \geq 1\}}] = E_Q\left[E_Q[|f'(xyZ_\tau)|\mathbf{1}_{\{Z_\tau > A\}}\mathbf{1}_{\{y \geq 1\}}] \Big|_{y=\frac{Z_T}{Z_\tau}}\right].$$

Comme  $f'$  est croissante, on a alors

$$f'(xyZ_\tau)\mathbf{1}_{\{y \geq 1\}} \geq f'(xZ_\tau)\mathbf{1}_{\{y \geq 1\}},$$

de sorte que

$$E_Q[|f'(xZ_T)|\mathbf{1}_{\{Z_\tau > A\}}\mathbf{1}_{\{\frac{Z_T}{Z_\tau} \geq 1\}}] \geq E_Q[f'(xZ_\tau)\mathbf{1}_{\{Z_\tau > A\}}\mathbf{1}_{\{\frac{Z_T}{Z_\tau} \geq 1\}}].$$

En utilisant à nouveau l'indépendance de  $Z_\tau$  et  $\frac{Z_T}{Z_\tau}$ , on obtient finalement

$$E_Q[|f'(xZ_T)|\mathbf{1}_{\{Z_\tau > A\}}\mathbf{1}_{\{\frac{Z_T}{Z_\tau} \geq 1\}}] \geq E_Q[f'(xZ_\tau)\mathbf{1}_{\{Z_\tau > A\}}]Q\left(\frac{Z_T}{Z_\tau} \geq 1\right) = +\infty$$

ce qui contredit l'hypothèse  $E_Q[|f'(xZ_T)|] < +\infty$ . On en déduit donc que  $E_Q[|f'(xZ_\tau)|] < +\infty$ . On raisonne de la même manière si on suppose que  $E_Q[f'(xZ_\tau)\mathbf{1}_{\{Z_\tau < \frac{1}{A}\}}] = -\infty$ . De plus, comme  $f'$  est croissante, on a pour tout compact  $K$ ,  $\sup_{x \in K} E_Q[|f'(xZ_\tau)|] < +\infty$ . On obtient de même  $\sup_{x \in K} E_Q[|f'(x\frac{Z_T}{Z_\tau})|] < +\infty$  en intervertissant les rôles de  $Z_\tau$  et  $\frac{Z_T}{Z_\tau}$ .

Par la convexité de  $f$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x > 0$ ,

$$|f(x)| \leq C + x|f'(x)|. \quad (3.11)$$

En appliquant ceci à  $xZ_\tau$  on obtient

$$\sup_{x \in K} E_P[|f(xZ_\tau)|] \leq C + \sup_{x \in K} x E_Q[|f'(xZ_\tau)|] < +\infty.$$

Si on considère maintenant une suite de temps d'arrêt  $(T_n)_{n \geq 1}$  tendant vers  $+\infty$ ,

$$E_Q[f'(xZ_t)] = E_Q[f'(xZ_{t \wedge T_n})] + E_Q[f'(xZ_t)\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}] - E_Q[f'(xZ_{t \wedge T_n})\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}] \quad (3.12)$$

Comme  $E_Q[|f'(xZ_t)|] < +\infty$ , le deuxième terme de la somme tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. De plus, comme  $Q$  préserve la propriété de Lévy, les variables

aléatoires  $Z_{t \wedge T_n}$  et  $\frac{Z_T}{Z_{t \wedge T_n}}$  sont indépendantes. On note  $a = \inf\{x \geq 0, f'(x) > 0\}$ . On a alors

$$\begin{aligned} E_Q[f'(xZ_{t \wedge T_n})\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}\mathbf{1}_{\{xZ_{t \wedge T_n} \geq a\}}]Q(Z_{t \wedge T_n} < Z_T) \\ = E_Q[f'(xZ_{t \wedge T_n})\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}\mathbf{1}_{\{xZ_{t \wedge T_n} \geq a\}}\mathbf{1}_{\{\frac{Z_T}{Z_{t \wedge T_n}} > 1\}}]. \end{aligned}$$

Comme  $f'$  est croissante, on a alors

$$E_Q[f'(xZ_{t \wedge T_n})\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}\mathbf{1}_{\{xZ_{t \wedge T_n} \geq a\}}]Q(Z_{t \wedge T_n} < Z_T) \leq E_Q[|f'(xZ_T)|\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}]. \quad (3.13)$$

On obtient de même

$$E_Q[|f'(xZ_{t \wedge T_n})|\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}\mathbf{1}_{\{xZ_{t \wedge T_n} < a\}}]Q(Z_{t \wedge T_n} > Z_t) \leq E_Q[|f'(xZ_T)|\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}]. \quad (3.14)$$

De plus, par continuité de la mesure de probabilité  $Q$  pour les suites croissantes d'ensembles,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(Z_{t \wedge T_n} < Z_T) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(\{Z_t < Z_T\} \cap \{t \leq T_n\}) = Q(Z_t < Z_T) > 0$$

et de même  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(Z_{t \wedge T_n} > Z_T) > 0$ . On déduit donc de (3.13) et (3.14) que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} E_Q[f'(xZ_{t \wedge T_n})\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}] \\ \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} E_Q[|f'(xZ_T)|\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}] \left( \frac{1}{Q(Z_{t \wedge T_n} < Z_t)} + \frac{1}{Q(Z_{t \wedge T_n} > Z_T)} \right) = 0 \end{aligned}$$

Finalement (3.12) entraîne la convergence pour  $f'$ . Si on considère maintenant  $f$ , on écrit de même

$$E_P[f(xZ_t)] = E_P[f(xZ_{t \wedge T_n})] + E_P[f(xZ_t)\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}] - E_P[f(xZ_{t \wedge T_n})\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}].$$

Comme  $E_P[|f(xZ_t)|] < +\infty$ , le deuxième terme de la suite tend vers 0. De plus, par (3.11), on a

$$E_P[|f(xZ_{t \wedge T_n})\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}|] \leq CP(t > T_n) + E_Q[|f'(xZ_{t \wedge T_n})|\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}]$$

et on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_P[|f(xZ_{t \wedge T_n})\mathbf{1}_{\{t > T_n\}}|] = 0$ .  $\square$

**Lemme 3.14** *On suppose que pour  $x > 0$ ,  $E_Q[|f'(xZ_T)|] < +\infty$ . Alors, pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ ,*

$$\sup_{t \leq T} \sup_{x \in K} E_P[f(xZ_t)] < +\infty \quad (3.15)$$

**Remarque.** Nous considérerons par la suite différentes fonctions pour lesquelles il existe des constantes positives  $c_1, c_2, c_3$  telles que

$$x^2 f''(x) \leq c_1 f(x) + c_2 x + c_3$$

Dans ce cas, (3.15) entraîne la condition d'intégrabilité (3.8) nécessaire à l'application du Théorème 3.2.

*Preuve* On commence par introduire la suite de temps d'arrêt

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : Z_t \geq n \text{ ou } Z_t \leq \frac{1}{n} \text{ ou } Y(\Delta X_t) \geq n \text{ ou } Y(\Delta X_t) \leq \frac{1}{n}\}$$

avec  $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ . Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut appliquer la formule d'Itô au processus arrêté  $f(xZ_{t \wedge \tau_n})_{t \leq T}$  : pour tout  $t \leq T$ ,

$$\begin{aligned} f(xZ_{t \wedge \tau_n}) = & f(x) + \sum_{i=1}^d \beta^{(i)} \int_0^{t \wedge \tau_n} x f'(xZ_{s-}) dX_s^{(c),i} \\ & + \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}^{d*}} x f'(xZ_{s-}) (Y(y) - 1) (\mu^X - \nu(dy)) ds \\ & + \frac{1}{2} {}^\top \beta c \beta x^2 \int_0^{t \wedge \tau_n} f''(xZ_{s-}) Z_{s-}^2 ds \\ & + \sum_{0 < s \leq t \wedge \tau_n} f(xZ_{s-} Y(\Delta X_s)) - f(xZ_{s-}) - f'(xZ_{s-}) x Z_{s-} (Y(\Delta X_s) - 1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

De plus, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\sum_{0 < s < \tau_n} |f(xZ_{s-} Y(\Delta X_s)) - f(xZ_{s-})|^2 \leq \sup_{\frac{x}{n^2} \leq z \leq x n^2} f'(z)^2 n^2 x^2 \left( \sum_{0 < s < \tau_n} (Y(\Delta X_s) - 1)^2 \right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} E_P \left[ \sum_{0 < s \leq \tau_n} |f(xZ_{s-} Y(\Delta X_s)) - f(xZ_{s-})|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq \sup_{\frac{x}{n^2} \leq z \leq x n^2} f'(z) n x E_P \left[ \sum_{0 < s < \tau_n} (Y(\Delta X_s) - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + E_P[|f(xZ_{\tau_n})|] + \sup_{\frac{x}{n} \leq z \leq x n} f(xz) \\ < +\infty \end{aligned}$$

de sorte que la martingale  $\int_0^\cdot \int_{\mathbb{R}^{d*}} f(xZ_{s-} Y(y)) - f(xZ_{s-}) (\mu^X - \nu(dy)) ds$  est bien définie. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(xZ_{t \wedge \tau_n}) = & f(x) + \sum_{i=1}^d \beta^{(i)} \int_0^{t \wedge \tau_n} x f'(xZ_{s-}) dX_s^{(c),i} \\ & + \int_0^{t \wedge \tau_n} \int_{\mathbb{R}^{d*}} f(xZ_{s-} Y(y)) - f(xZ_{s-}) (\mu^X - \nu(dy)) ds + \int_0^{t \wedge \tau_n} \psi_Q(f, x, s) ds \end{aligned} \quad (3.17)$$

où

$$\begin{aligned} \psi_Q(f, x, s) = & \frac{1}{2} {}^\top \beta c \beta f''(xZ_{s-}) Z_{s-}^2 \\ & + \int_{\mathbb{R}^{d*}} f(xZ_{s-} Y(y)) - f(xZ_{s-}) - f'(xZ_{s-}) x Z_{s-} (Y(y) - 1) \nu(dy) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Notons en particulier que comme  $f$  est convexe,  $\psi_Q(f, x, s) \geq 0$  et de plus, on a presque sûrement, pour  $\nu$ -presque tout  $y$ ,

$$f(xZ_{s-} Y(y)) - f(xZ_{s-}) - f'(xZ_{s-}) x Z_{s-} (Y(y) - 1) \geq 0.$$

On déduit alors de (3.17) que

$$E[f(xZ_{t \wedge T_n})] = \int_0^t E[\psi_Q(f, x, s) \mathbf{1}_{\{s \leq T_n\}}] ds.$$

Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient par le Lemme 3.13 et le théorème de convergence monotone,

$$E[f(xZ_t)] = \int_0^t E[\psi_Q(f, x, s)] ds$$

En particulier,  $t \mapsto E[f(xZ_t)]$  est une fonction continue et croissante et donc pour tout compact  $K$ ,

$$\sup_{t \leq T} \sup_{x \in K} E[f(xZ_t)] = \sup_{x \in K} E[f(xZ_T)] < +\infty \quad \square$$

### 3.3.2 Une décomposition pour les mesures qui préservent la propriété de Lévy

On donne maintenant une équation satisfaite par la densité de toute mesure  $Q \in \mathcal{M}'$  vérifiant (3.8). On introduit pour cela les notations

$$\begin{cases} \xi_s(x) = x E_Q[f''(xZ_{T-s})Z_{T-s}] \\ H_s(x, y) = E_Q[f'(xZ_{T-s}Y(y)) - f'(xZ_{T-s})]. \end{cases}$$

**Lemme 3.15** *Soit  $\lambda > 0$  fixé. On suppose que  $Q \in \mathcal{M}'$  vérifie (3.8). Alors presque sûrement, pour tout  $t \leq T$ ,*

$$\begin{aligned} E_Q[f'(\lambda Z_T) | \mathcal{F}_t] &= E_Q[f'(\lambda Z_T)] + \lambda \sum_{i=1}^d \beta^{(i)} \int_0^t \xi_s(Z_{s-}) dX_s^{(c), i} \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} H_s(Z_{s-}, y) (\mu^X - Y(y) \nu(dy)) ds. \end{aligned} \quad (3.19)$$

*Preuve* On commence par montrer que les termes qui apparaissent dans le membre de droite de (3.19) sont bien définis. On rappelle que la partie martingale continue est bien définie si il existe une suite de temps d'arrêt  $(T_p)_{p \geq 1}$  tendant vers  $+\infty$  telle que

$$\sum_{i=1}^d \beta^{(i)^2} c_i^2 E_Q \left[ \int_0^{T \wedge T_p} \xi_s^2(Z_{s-}) ds \right] < +\infty.$$

On considère la suite de temps d'arrêt donnée par  $T_p = \{\inf t \geq 0 : Z_t \geq p \text{ ou } Z_t \leq \frac{1}{p}\}$ . On a alors

$$E_Q \left[ \int_0^{T \wedge T_p} \xi_s^2(\lambda Z_{s-}) ds \right] \leq \lambda^2 p^2 T \left( \sup_{t \leq T} \sup_{\frac{\lambda}{p} \leq x \leq \lambda p} E_Q[f''(xZ_{T-s})Z_{T-s}] \right)^2 < +\infty$$

Pour la martingale discontinue, il nous faut montrer qu'il existe une suite de temps d'arrêt  $(\tau_p)_{p \geq 1}$  tendant vers  $+\infty$  telle que

$$E_Q \left[ \int_0^{T \wedge \tau_p} \int_{\mathbb{R}^{d*}} H_s^2(\lambda Z_{s-}, y) Y(y) \nu(dy) ds \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty \quad (3.20)$$

Pour cela, on considère la suite de temps d'arrêt définie par

$$\tau_p = \inf\{t \geq 0 : Z_t \geq p \text{ ou } Z_t \leq \frac{1}{p} \text{ ou } Y(\Delta X_t) \geq p\}$$

et on remarque qu'il existe au plus un saut tel que  $Y(\Delta X_t) \geq p$  sur l'intervalle stochastique  $[0, \tau_p]$ . D'une part, par le théorème des accroissements finis,

$$H_s^2(\lambda Z_{s-}, y) \mathbf{1}_{\{Y(y) \leq p\}} \leq \sup_{\frac{1}{n^2} \leq \eta \leq n^2} E_Q[f''(\lambda \eta Z_{T-s}) Z_{T-s}]^2 \lambda^2 n^2 (Y(y) - 1)^2 \mathbf{1}_{\{Y(y) \leq p\}}$$

En prenant l'espérance,

$$\begin{aligned} E_Q \left[ \int_0^{T \wedge \tau_p} \int_{Y(y) \leq p} H_s^2(\lambda Z_{s-}, y) Y(y) \nu(dy) ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq \lambda T p \sup_{s \leq T} \sup_{\frac{1}{p^2} \leq x \leq p^2} E_Q[f''(\lambda \eta Z_{T-s}) Z_{T-s}] \left( \int_{Y(y) \leq p} (Y(y) - 1)^2 Y(y) \nu(dy) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Cette quantité est bien finie. En effet, le premier terme du produit est fini par l'hypothèse (3.8) et le deuxième par les conditions (1.18) vérifiées par les paramètres de Girsanov des mesures martingales. D'autre part,

$$H_s^2(\lambda Z_{s-}, y) \mathbf{1}_{\{Y(y) \geq p\}} \leq \left( E_Q[f'(\lambda Z_T) | \mathcal{F}_s]^2 + \sup_{\frac{1}{p} \leq x \leq p} E_Q[|f'(\lambda x \frac{Z_T}{Z_s})|]^2 \right) \mathbf{1}_{\{Y(y) \geq p\}}.$$

Comme il existe sur l'intervalle stochastique  $[0, T \wedge \tau_p]$  au-plus un saut tel que  $Y(\Delta X_t) \geq p$ , on a alors

$$\begin{aligned} E_Q \left[ \int_0^{T \wedge \tau_p} \int_{Y(y) \geq p} H_s^2(\lambda Z_{s-}, y) Y(y) \nu(dy) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq 2 E_Q[|f'(\lambda Z_T)|] + 2 \sup_{\frac{1}{p} \leq x \leq p} E_Q[|f'(\lambda x \frac{Z_T}{Z_{\tau_p}})|] < +\infty \end{aligned} \quad (3.22)$$

Finalement, en ajoutant (3.22) et (3.21), on a bien (3.20). Ainsi, les expressions qui apparaissent dans (3.19) sont bien définies. Pour obtenir la décomposition, on cherche maintenant à appliquer la formule d'Itô. Cependant, on ne peut pas l'appliquer directement à la fonction  $f'$ . On introduit donc une suite de fonctions  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  bornées, qui approchent  $f'$  et auxquelles on peut appliquer la formule d'Itô. On construit en particulier  $\phi_n$  de sorte que  $f'$  et  $\phi_n$  coïncident sur  $[\frac{1}{n}, n]$ . On pose donc

$$\phi_n(x) = \begin{cases} A_n(x) & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ f'(x) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq n \\ B_n(x) & \text{si } x > n \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A_n(x) &= f'(\frac{1}{n}) - \int_{x \vee \frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} f''(y) (2ny - 1)^2 (5 - 4ny) dy \\ B_n(x) &= f'(n) + \int_n^{x \wedge (n+1)} f''(y) (n+1-y)^2 (2y+1-2n) dy \end{aligned}$$

On peut noter que les recollements en  $\frac{1}{2n}$ ,  $\frac{1}{n}$ ,  $n$  et  $n+1$  sont faits de sorte que  $\phi_n$  soit de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . De plus, pour chaque  $n$ ,  $\phi_n$  est bornée, et on a les majorations suivantes : il existe  $C > 0$  tel que

$$|\phi_n(x)| \leq 4|f'(x)| + C, \quad |\phi'_n(x)| \leq 3|f''(x)| \quad \text{et} \quad |\phi_n(x) - \phi_n(y)| \leq 7|f'(x) - f'(y)| \quad (3.23)$$

On rappelle que comme  $Z$  est la densité d'une mesure qui préserve la propriété de Lévy, la variable aléatoire  $\frac{Z_T}{Z_t}$  est indépendante de  $\mathcal{F}_t$  et de même loi que  $Z_{T-t}$ . On a donc pour tout  $n \geq 1$ , presque sûrement, pour tout  $t \leq T$ ,

$$E_Q[\phi_n(\lambda Z_T) | \mathcal{F}_t] = E_Q[\phi_n(\lambda x Z_{T-t})]_{|x=Z_t}$$

On pose alors  $\rho_n(t, x) = E_Q[\phi_n(\lambda x Z_{T-t})]$  et on cherche à appliquer la formule d'Itô à  $\rho_n(t, Z_t)$ . Pour cela, il nous faut vérifier que  $\rho_n$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  relativement à  $x$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  relativement à  $t$ . On note d'abord que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \phi_n(\lambda x Z_{T-t}) \right| = \left| \lambda Z_{T-t} \phi'_n(\lambda x Z_{T-t}) \right| \leq \lambda(n+1) \sup_{z \in \mathbb{R}} |\phi'_n(z)| < +\infty.$$

Donc  $\rho_n$  est dérivable en  $x$  et

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_n(t, x) = \lambda E_Q[\phi'_n(\lambda x Z_{T-t})]$$

et la fonction  $(x, t) \mapsto E_Q[\phi'_n(\lambda x Z_{T-t})]$  est continue. De même

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_n(\lambda x Z_{T-t}) \right| = \lambda^2 Z_{T-t}^2 \phi''_n(\lambda x Z_{T-t}) \leq \lambda^2(n+1)^2 \sup_{z \in \mathbb{R}} \phi''_n(z) < +\infty.$$

Donc  $\rho_n$  est deux fois dérivable en  $x$  et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho_n(t, x) = \lambda^2 E_Q[\phi''_n(\lambda x Z_{T-t}) Z_{T-t}^2].$$

Cette fonction est également continue en  $t$ . Pour obtenir la dérivabilité en  $t$  de  $\rho_n$ , on applique la formule d'Itô à  $\phi_n(\lambda x Z_{T-t})$  :

$$\begin{aligned} \phi_n(\lambda x Z_{T-t}) &= \phi_n(\lambda x) + \sum_{i=1}^d \int_0^{T-t} \lambda x \phi'_n(\lambda x Z_{s-}) \beta^{(i)} Z_{s-} dX_s^{(c), Q, i} \\ &\quad + \lambda x \int_0^{T-t} \int_{\mathbb{R}^{d*}} \phi_n(\lambda x Z_s Y(y)) - \phi_n(\lambda x Z_{s-}) (\mu^X - Y(y) \nu(dy)) ds \\ &\quad + \int_0^{T-t} \psi_n(\lambda x, Z_{s-}) ds \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \psi_n(u, z) &= {}^\top \beta c \beta (uz \phi'_n(u, z) + \frac{1}{2} u^2 \phi''_n(u, z)) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{d*}} \left( (\phi_n(uz Y(y)) - \phi_n(uz)) Y(y) - u \phi'_n(uz) z (Y(y) - 1) \right) \nu(dy). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_Q[\phi_n(\lambda x Z_{T-t})] = \int_0^{T-t} E_Q[\psi_n(\lambda x, Z_{s-})] ds.$$

En particulier,  $\rho_n$  est dérivable en  $t$  et

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_n(t, x) = -E_Q[\psi_n(\lambda x, Z_{T-t})]$$

et cette fonction est continue.

On peut donc finalement appliquer la formule d'Itô à  $\rho_n$ . On introduit pour cela les notations

$$\begin{cases} \xi_s^{(n)}(x) = x E_Q[Z_{T-s} \phi_n'(x Z_{T-s})] \\ H_s^{(n)}(x, y) = E_Q[\phi_n(x Z_{T-s} Y(y)) - \phi_n(x Z_{T-s})]. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \rho_n(t, Z_t) &= E_Q[\phi_n(\lambda Z_T)] + \sum_{i=1}^d \beta^{(i)} \int_0^t \xi_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}) dX_s^{(c), Q, i} \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} \xi_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}) (Y(y) - 1) \mathbf{1}_{\{|Y(y)-1| < 1\}} (\mu^X - Y(y) \nu(dy) ds) \\ &+ \frac{1}{2} {}^\top \beta c \beta \int_0^t \left( \lambda^2 Z_{s-}^2 E_Q[Z_{T-s}^2 \phi_n''(\lambda x Z_{T-s})] |_{x=Z_{s-}} + 2 \xi_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}) \right) ds \\ &+ \sum_{0 < s \leq t} H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, Y(\Delta X_s)) - \xi_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}) (Y(\Delta X_s) - 1) \mathbf{1}_{\{|Y(\Delta X_s)-1| \leq 1\}} \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} \xi_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}) (Y(y) - 1) \mathbf{1}_{\{|Y(y)-1| \geq 1\}} \nu(dy) ds - \int_0^t E_Q[\psi_n(\lambda x Z_{T-s})] |_{x=Z_{s-}} ds \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \rho_n(t, Z_t) &= E_Q[\phi_n(\lambda Z_T)] + \sum_{i=1}^d \beta^{(i)} \int_0^t \xi_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}) dX_s^{(c), Q, i} \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) (\mu^X - Y(y) \nu(dy) ds). \end{aligned}$$

Il reste alors à faire tendre  $n$  vers  $+\infty$ . On note dans la suite, pour tout  $a > 0$ ,

$$\sigma_a = \inf\{t \geq 0, \lambda Z_t \geq a \text{ ou } \lambda Z_t \leq \frac{1}{a}\},$$

avec  $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ . On a bien sûr  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sigma_a = +\infty$  p.s.

On commence par remarquer que

$$|E_Q[f'(\lambda Z_T) | \mathcal{F}_t] - \rho_n(t, \lambda Z_t)| \leq E_Q[|f'(\lambda Z_T) - \phi_n(\lambda Z_T)| | \mathcal{F}_t]$$

Comme  $f'$  et  $\phi_n$  coïncident sur  $[\frac{1}{n}, n]$ , on peut écrire par (3.23),

$$\begin{aligned} |E_Q[f'(\lambda Z_T) | \mathcal{F}_t] - \rho_n(t, \lambda Z_t)| &\leq E_Q[|f'(\lambda Z_T) - \phi_n(\lambda Z_T)| \mathbf{1}_{\{\sigma_n < T\}} | \mathcal{F}_t] \\ &\leq E_Q[(5|f'(\lambda Z_T)| + C) \mathbf{1}_{\{\sigma_n < T\}} | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$



Or, on a pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q \left( \sup_{t \leq T} E_Q \left[ (5|f'(\lambda Z_T)| + C) \mathbf{1}_{\{\sigma_n < T\}} | \mathcal{F}_t \right] \geq \alpha \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} E_Q \left[ (5|f'(\lambda Z_T)| + C) \mathbf{1}_{\{\sigma_n < T\}} \right] = 0$$

et on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q \left( \sup_{t \leq T} \left| \rho_n(t, \lambda Z_t) - E_Q[f'(\lambda Z_T) | \mathcal{F}_t] \right| > \alpha \right) = 0. \quad (3.24)$$

On considère maintenant la convergence des trois termes de droite de (3.19). Tout d'abord, on a presque sûrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(\lambda Z_T) = f'(\lambda Z_T)$ , et pour tout  $n \geq 1$ ,  $|\phi_n(\lambda Z_T)| \leq 4|f'(\lambda Z_T)|$ . Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_Q[\phi_n(\lambda Z_T)] = E_Q[f'(\lambda Z_T)]. \quad (3.25)$$

Si on considère maintenant la suite de martingales continues, on obtient par (3.23),

$$\begin{aligned} |\xi_t^{(n)}(\lambda Z_t) - \xi_t(\lambda Z_t)| &\leq E_Q \left[ \lambda Z_T |\phi_n'(\lambda Z_T) - f''(\lambda Z_T)| | \mathcal{F}_t \right] \\ &\leq 4\lambda E_Q \left[ Z_T |f''(\lambda Z_T)| \mathbf{1}_{\{\sigma_n < T\}} | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

On en déduit comme précédemment que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q \left( \sup_{t \leq T} |\xi_t^{(n)}(\lambda Z_t) - \xi_t(\lambda Z_t)| > \alpha \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{\alpha} E_Q \left[ Z_T f''(\lambda Z_T) \mathbf{1}_{\{\sigma_n < T\}} \right] = 0$$

et donc que, quitte à prendre une sous-suite, le processus  $\xi^{(n)}$  converge presque sûrement vers  $\xi$ . De plus, presque sûrement,  $|\xi^{(n)}| \leq 3|\xi|$ , et  $\xi$  est intégrable par rapport à  $X^{(c),i}$ , pour tout  $i \leq d$ . Ainsi, par le Théorème I.4.31 dans [41], on a pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q \left( \left| \sup_{t \leq T} \int_0^t (\xi_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}) - \xi_s(\lambda Z_{s-})) dX_s^{(c),Q,i} \right| > \alpha \right) = 0. \quad (3.26)$$

On cherche finalement à montrer la convergence en probabilité de la suite de martingales purement discontinues. On fixe pour cela  $p \geq 1$  et on considère la suite de processus arrêtés en  $\tau_p$ . On commence par écrire

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_p\}} |H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y)| (\mu^X - Y(y) \nu(dy)) ds = M_t^{(n)} + N_t^{(n)}$$

avec

$$M_t^{(n)} = \int_0^t \int_{|Y(y)-1| < \frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_p\}} |H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y)| (\mu^X - Y(y) \nu(dy)) ds$$

$$N_t^{(n)} = \int_0^t \int_{|Y(y)-1| \geq \frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_p\}} |H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y)| (\mu^X - Y(y) \nu(dy)) ds$$

On va d'abord montrer que  $M_T^{(n)}$  converge dans  $L^2$  vers 0, puis que  $N_T^{(n)}$  converge dans  $L^1$  vers 0.

Pour cela, on commence par noter que

$$E_Q[M_T^{(n)2}] = \int_0^T \int_{|Y(y)-1| < \frac{1}{2}} E_Q[H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y)]^2 Y(y) \nu(dy) ds. \quad (3.27)$$

Or, on a

$$\begin{aligned} & \left| H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y) \right| = \\ & \left| E_Q[\phi_n(x \lambda Z_{T-s} Y(y)) - \phi_n(x \lambda Z_{T-s}) - (f'(\lambda x Z_{T-s} Y(y)) - f'(\lambda x Z_{T-s}))] \Big|_{x=Z_{s-}} \right|. \end{aligned}$$

On rappelle que sur l'ensemble considéré,  $|Y(y) - 1| < \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{p} \leq x = Z_{s-} \leq p$ . Comme  $\phi_n$  et  $f'$  coïncident sur l'intervalle  $[\frac{1}{n}, n]$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} & \left| H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y) \right| = \left| E_Q[\mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{2n}{3p}} < T\}} (\phi_n(\lambda x Z_{T-s} Y(y)) - \phi_n(\lambda x Z_{T-s}) \right. \\ & \quad \left. - (f'(\lambda x Z_{T-s} Y(y)) - f'(\lambda x Z_{T-s}))) \Big|_{x=Z_{s-}} \right|. \end{aligned}$$

Par (3.23), on a alors

$$\begin{aligned} & \left| H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y) \right| \leq 8 \left| E_Q[\mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{2n}{3p}} < T\}} (f'(\lambda x Z_{T-s} Y(y)) - f'(\lambda x Z_{T-s}))] \right| \\ & \leq 8 \lim_{A \rightarrow +\infty} \left| E_Q[\mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{2n}{3p}} < T\}} (f'(\lambda x Z_{T-s} Y(y)) - f'(\lambda x Z_{T-s})) \mathbf{1}_{\{Z_{T-s} \leq A\}}] \right| \end{aligned}$$

Or la fonction  $z \mapsto E_Q[f'(z Z_{T-s}) \mathbf{1}_{\{Z_{T-s} \leq A\}}]$  est dérivable, de dérivée  $E_Q[f''(Z_{T-s}) Z_{T-s} \mathbf{1}_{\{Z_{T-s} \leq A\}}]$ . On a alors par l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned} & \left| H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y) \right| \leq \\ & \leq 8 \lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{3}{2}} E_Q[f''(x Z_{T-s} z) Z_{T-s} \mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{2n}{3p}} < T\}} \mathbf{1}_{\{Z_{T-s} \leq A\}}] |Y(y) - 1| \end{aligned}$$

En insérant ceci dans (3.27), on obtient

$$\begin{aligned} & E_Q[M_T^{(n)2}] \leq \\ & 8 E_Q \left[ \int_0^T \int_{|Y(y)-1| < \frac{1}{2}} \lambda^2 \lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{3}{2}} E_Q[f''(\lambda x z Z_{T-s}) x Z_{T-s} \mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{2n}{3p}} < T\}} \mathbf{1}_{\{Z_{T-s} \leq A\}}] \Big|_{x=Z_{s-}}^2 \right. \\ & \quad \left. \cdot (Y(y) - 1)^2 Y(y) \nu(dy) ds \right] \\ & \leq 12 \lambda^2 \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \int_{|Y(y)-1| < \frac{1}{2}} (Y(y) - 1)^2 \nu(dy) \right) \\ & \quad \cdot E_Q \left[ \int_0^T \sup_{\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{3}{2}} E_Q[f''(\lambda x z Z_{T-s}) x Z_{T-s} \mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{2n}{3p}} < T\}} \mathbf{1}_{\{Z_{T-s} \leq A\}}] \Big|_{x=Z_{s-}}^2 ds \right] \end{aligned}$$

Or, on a presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{3}{2}} E_Q[f''(\lambda x z Z_{T-s}) \lambda x Z_{T-s} \mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{2n}{3p}} < T\}} \mathbf{1}_{\{Z_{T-s} \leq A\}}] \Big|_{x=Z_{s-}} = 0$$

et de plus,

$$E_Q[f''(\lambda x Z_{T-s}) \lambda x Z_{T-s} \mathbf{1}_{\{T > \sigma_{\frac{2n}{3p}}\}} \mathbf{1}_{\{Z_{T-s} \leq A\}}]_{x=Z_{s-}}^2 \leq \sup_{\frac{1}{2p} \leq x \leq \frac{3p}{2}} E_Q[f''(\lambda x Z_{T-s}) \lambda x Z_{T-s}]^2 < +\infty.$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_Q[M_T^{(n)2}] = 0$ .

On montre maintenant la convergence dans  $L^1$  de  $N_T^{(n)}$ . Pour cela, il nous faut montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_Q \left[ \int_0^T \int_{|Y(y)-1| > \frac{1}{2}} |H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y)| Y(y) \nu(dy) ds \right] = 0.$$

On commence par noter que

$$E_Q[|\phi_n(\lambda x Z_{T-s} Y(y)) - f'(\lambda x Z_{T-s} Y(y))|]_{x=Z_{s-}} = E_Q[|\phi_n(\lambda Z_T) - f'(\lambda Z_T)| | \mathcal{F}_{s-}].$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} |H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y)| \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_p\}} &\leq E_Q[|\phi_n(\lambda Z_T) - f'(\lambda Z_T)| | \mathcal{F}_{s-}] \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_p\}} \\ &\quad + E_Q[|\phi_n(\lambda x Z_{T-s}) - f'(\lambda x Z_{T-s})|]_{x=Z_{s-}} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_p\}} \end{aligned}$$

Comme  $\phi_n$  et  $f'$  coïncident sur  $[\frac{1}{n}, n]$ , et en utilisant (3.23), on en déduit que

$$\begin{aligned} |H_s^{(n)}(\lambda Z_{s-}, y) - H_s(\lambda Z_{s-}, y)| \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_p\}} &\leq \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_p\}} \left( 5E_Q[|f'(\lambda Z_T)| \mathbf{1}_{\{\sigma_n < T\}}] \right. \\ &\quad \left. + 5E_Q[|f'(\lambda x Z_{T-s})| \mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{n}{p}} < T\}}]_{x=Z_{s-}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E_Q[|N_T^{(n)}|] &\leq 5 \left( \int_{|Y(y)-1| > \frac{1}{2}} Y(y) \nu(dy) \right) \\ &\quad \cdot \int_0^T \left( E_Q[|f'(\lambda Z_T)| \mathbf{1}_{\{\sigma_n < T\}}] + \sup_{\frac{1}{p} \leq x \leq p} E_Q[|f'(\lambda x Z_{T-s})| \mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{n}{p}} < T\}}] \right) ds \end{aligned}$$

Or  $E_Q[|f'(\lambda Z_T)|] < +\infty$ , de sorte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_Q[|f'(\lambda Z_T)| \mathbf{1}_{\{\sigma_n < T\}}] = 0$ . De plus, comme  $f'$  est croissante,

$$\sup_{\frac{1}{p} \leq x \leq p} E_Q[|f'(\lambda x Z_{T-s})| \mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{n}{p}} < T\}}] \leq E_Q[ (|f'(\lambda p Z_{T-s})| + |f'(\frac{\lambda}{p} Z_{T-s})|) \mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{n}{p}} < T\}}].$$

Comme de plus,  $\sup_{x \in K} \sup_{s \leq T} E_Q[|f'(x Z_s)|] < +\infty$ , on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \sup_{\frac{1}{p} \leq x \leq p} E_Q[|f'(\lambda x Z_{T-s})| \mathbf{1}_{\{\sigma_{\frac{n}{p}} < T\}}] ds = 0.$$

Ainsi, on a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_Q[|N_T^{(n)}|] = 0$ . On a également montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_Q[M_T^{(n)2}] = 0$ , de sorte que par l'inégalité de Doob, on a pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(\sup_{s \leq T} |M_s^{(n)} + N_s^{(n)}| \geq \alpha) = 0. \quad (3.28)$$

Finalement, quitte à prendre une sous-suite, on déduit de (3.24), (3.25) et (3.26) que (3.28) est vérifiée pour tout  $t \leq T$ , presque sûrement.  $\square$

### 3.3.3 Une équation pour la mesure minimale

Le lemme 3.15 nous permet maintenant d'écrire les conditions sur les paramètres de Girsanov  $(\beta, Y)$  d'une mesure  $Q \in \mathcal{M}'$  sous lesquelles une écriture de la forme

$$f'(Z_T) = x + (\phi \cdot S)_T$$

existe. On rappelle que par le Théorème 3.5, il s'agit d'une condition nécessaire pour qu'une mesure  $Q$  vérifiant  $E_Q[|f'(Z_T)|] < +\infty$  soit  $f$ -minimale.

**Lemme 3.16** *Soit  $Z^*$  la densité d'une mesure  $f$ -minimale sur  $[0, T]$  qui préserve la structure de Lévy et vérifie (3.8). On note  $(\beta^*, Y^*)$  ses paramètres de Girsanov. Alors pour presque tout  $x \in \text{supp}(Z_{T-}^*)$  et presque tout  $y \in \text{supp}(\nu)$ ,*

$$f'(xY^*(y)) - f'(x) = \Phi(x) \left( \sum_{i=1}^d \alpha_i (e^{y_i} - 1) \right) \quad (3.29)$$

où  $\Phi$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ . De plus, si  $c \neq 0$ , on a

$$f'(xY^*(y)) - f'(x) = \sum_{i=1}^d (x f''(x) \beta^{*i} + V_i) (e^{y_i} - 1) \quad (3.30)$$

où  $V$  est tel que  $cV = 0$ .

**Remarque.** Notons en particulier que si la matrice  $c$  est inversible, on a

$$f'(xY^*(y)) - f'(x) = x f''(x) \sum_{i=1}^d \beta^{*i} (e^{y_i} - 1).$$

*Preuve* Comme  $Q$  est  $f$ -minimale, il doit exister par le Théorème 3.5, un réel  $a$  et un processus prévisible  $\hat{\phi}$  tels que presque sûrement,

$$f'(Z_T^*) = a + (\hat{\phi} \cdot S)_T$$

et tels que  $(\hat{\phi} \cdot S)$  soit une  $Q$ -martingale. On a donc presque sûrement pour tout  $t \leq T$ ,

$$E_Q[f'(Z_T^*) | \mathcal{F}_t] = a + \sum_{i=1}^d \int_0^t \hat{\phi}_s^{(i)} dS_s^{(i)}. \quad (3.31)$$

En appliquant la formule d'Itô à  $e^{X_t}$  et en utilisant le fait que  $S$  est une martingale sous  $Q$ , on a pour tout  $i \leq d$ ,

$$S_t^{(i)} = S_0^{(i)} + \sum_{i=1}^d \int_0^t S_{s-}^{(i)} \beta^{*(i)} dX_s^{(c),i} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} S_{s-}^{(i)} (e^{y_i} - 1) (\mu^{X^{(i)}} - Y^*(y) \nu(dy_i) ds)$$

de sorte que (3.31) devient

$$\begin{aligned} E_Q[f'(Z_T^*) | \mathcal{F}_t] = & a + \sum_{i=1}^d \int_0^t \hat{\phi}_s^{(i)} S_{s-}^{(i)} \beta^{*(i)} dX_s^{(c),i} \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} \hat{\phi}_s^{(i)} S_{s-}^{(i)} (e^{y_i} - 1) (\mu^X - Y^*(y) \nu(dy) ds). \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition de la martingale  $(E_Q[f'(Z_T^*)|\mathcal{F}_t])_{t \geq 0}$  en somme de martingales continues et purement discontinues, on peut identifier cette décomposition avec celle obtenue par le Lemme 3.15 (en prenant  $\lambda = 1$ ).

On commence par considérer les composantes discontinues. Notons qu'elles sont non nulles car nous avons supposé que le modèle considéré est incomplet et donc que le processus  $X$  a nécessairement des sauts. Ainsi, presque sûrement, pour presque tout  $s \leq T$ , pour presque tout  $y \in \text{supp}(\nu)$  :

$$H_s(xZ_{s-}, y) = \sum_{i=1}^d S_{s-}^{(i)} \hat{\phi}_s^{(i)}(e^{y_i} - 1).$$

Comme  $f'$  est continue et les trajectoires sont càdlàg, on obtient lorsque  $s$  tend vers  $T$ ,

$$f'(Z_{T-}^* Y^*(y)) - f'(Z_{T-}^*) = \sum_{i=1}^d S_{T-}^{(i)} \hat{\phi}_{T-}^{(i)}(e^{y_i} - 1). \quad (3.32)$$

On considère cette équation à  $\omega$  fixé et pour  $y$  appartenant à l'intérieur de  $\text{supp}(\nu)$ . En différenciant par rapport à  $y$ , on obtient pour tout  $i \leq d$ ,

$$Z_{T-}^* \frac{\partial}{\partial y_i} Y^*(y) f''(Z_{T-}^*(\omega) Y^*(y)) = S_{s-}^{(i)}(\omega) \hat{\phi}_{s-}^{(i)}(\omega) e^{y_i}.$$

On pose alors pour un  $y_0 \in \text{supp}(\nu)$  fixé arbitrairement :

$$\Phi(x) = x f''(x Y^*(y_0)) \text{ et } \alpha_i = e^{-y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} Y^*(y_0)$$

de sorte que presque sûrement

$$S_{T-}^{(i)} \hat{\phi}_{T-}^{(i)} = \Phi(Z_{T-}^*) \alpha_i.$$

En insérant cette égalité dans (3.32), on obtient

$$f'(Z_{T-}^* Y^*(y)) - f'(Z_{T-}^*) = \Phi(Z_{T-}^*) \sum_{i=1}^d \alpha_i (e^{y_i} - 1)$$

et on en déduit (3.29).

On suppose maintenant que  $c \neq 0$ . On peut donc identifier les composantes continues : presque sûrement,

$$\sum_{i=1}^d \int_0^t \xi_s(Z_{s-}^*) \beta^{*(i)} dX_s^{(c),i} = \sum_{i=1}^d \int_0^t S_{s-}^{(i)} \hat{\phi}_{s-}^{(i)} dX_s^{(c),i}.$$

En considérant de part et d'autre de l'égalité la variation quadratique prévisible, on a presque sûrement, pour presque tout  $s \leq T$ ,

$$(\xi_s(Z_{s-}^*))^{2\top} \beta^* c \beta^* =^\top (S_{s-} \hat{\phi}_{s-}) c (S_{s-} \hat{\phi}_{s-}).$$

où  $S_{s-} \hat{\phi}_{s-}$  désigne le vecteur de  $\mathbb{R}^d$  de composantes  $(S_{s-}^{(i)} \hat{\phi}_{s-}^{(i)})_{1 \leq i \leq d}$ . Comme les trajectoires sont càdlàg, on obtient lorsque  $s$  tend vers  $T$ ,

$$Z_{T-}^* f''(Z_{T-}^*)^\top \beta^* c \beta^* =^\top (S_{T-} \hat{\phi}_{T-}) c (S_{T-} \hat{\phi}_{T-}). \quad (3.33)$$

Or  $c$  est une matrice symétrique positive, et (3.33) entraîne donc que

$$Z_{T-}^* f''(Z_{T-}^*) \beta^* - S_{T-} \hat{\phi}_{T-} = V$$

où  $V$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 0. En insérant ceci dans (3.32), on obtient alors

$$f'(Z_{T-}^* Y^*(y)) - f'(Z_{T-}^*) = Z_{T-}^* f''(Z_{T-}^*) \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)} (e^{y_i} - 1) + \sum_{i=1}^d V^{(i)} (e^{y_i} - 1).$$

On en déduit (3.30).  $\square$

### 3.3.4 Etude du support de $Z_T^*$

On étudie maintenant en fonction des caractéristiques du modèle la forme du support de la variable aléatoire  $Z_T^*$ .

**Définition 3.17** *Le support d'une mesure  $\rho$  sur  $\mathbb{R}^d$  est l'ensemble*

$$\text{supp}(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho(G) > 0 \text{ pour tout ouvert } G \text{ contenant } x\}.$$

**Remarque.** En particulier, le support d'une mesure est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^d$ .

On suppose que  $Q^*$  préserve la propriété de Lévy. Ainsi, par le Lemme 3.12,  $\ln(Z^*)$  est un processus de Lévy à valeurs réelles, à la fois sous  $P$  et sous  $Q^*$ . En particulier, le processus  $\ln(Z^*)$  et donc  $Z^*$  n'a pas d'instant fixe de discontinuité, de sorte que le support de la loi de  $Z_{T-}^*$  est celui de la loi de  $Z_T^*$ . De plus, l'étude du support de  $\ln(Z_T^*)$  est donc celle du support d'une loi infiniment divisible. Cette question a en particulier été considérée dans [39],[40],[77]. On cite ici le résultat de [68] concernant la loi du support d'un processus de Lévy à un instant donné.

**Théorème 3.18 ([68], Th 24.10)** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy de caractéristiques  $(b, c, \nu)$  à valeurs réelles.*

- (j) *Si  $c \neq 0$  ou si  $\int_{|x| \geq 1} x \nu(dx) = +\infty$ , alors  $\text{supp}(X_t) = \mathbb{R}$ .*
- (jj) *Si  $0 \in \text{supp}(\nu)$  et si  $\text{supp}(\nu) \cap ]0, +\infty[ \neq \emptyset$  et  $\text{supp}(\nu) \cap ]-\infty, 0[ \neq \emptyset$ , alors  $\text{supp}(X_t) = \mathbb{R}$ .*
- (jjj) *Si  $0 \in \text{supp}(\nu)$  et  $\text{supp}(\nu) \subseteq [0, +\infty[$  alors  $\text{supp}(\nu) = [bt, +\infty[$ . Si  $0 \in \text{supp}(\nu)$  et  $\text{supp}(\nu) \subseteq ]-\infty, 0]$ , alors  $\text{supp}(\nu) = ]-\infty, bt]$ .*

On cherche ici à obtenir des propriétés du support de  $Z_T^*$  basées sur les caractéristiques du processus  $X$  et les paramètres de Girsanov de la mesure  $Q^*$ .

**Lemme 3.19** *Soit  $Z^*$  la densité d'une mesure  $f$ -minimale sur  $[0, T]$  qui préserve la propriété de Lévy et vérifie (3.8). Alors :*

- (i) *Si  ${}^\top \beta^* c \beta^* \neq 0$ ,  $\text{supp}(Z_T^*) = \mathbb{R}^+$ .*
- (ii) *Si  $\text{supp}(\nu)$  est d'intérieur non-vide, alors il existe  $A$  tel que  $[A, +\infty[ \subseteq \text{supp}(Z_T^*)$  ou  $]0, A] \subseteq \text{supp}(Z_T^*)$ .*

*De plus :*

- *si il existe  $y$  et  $\bar{y}$  dans  $\text{supp}(\nu)$  tels que  $\ln(Y^*(y)) \cdot \ln(Y^*(\bar{y})) < 0$ , alors  $\text{supp}(Z_T^*) = \mathbb{R}^+$ .*
- *si  $Z^*$  définit une mesure  $f$ -minimale sur tout intervalle  $[0, T]$ , on a  $\bigcup_{T \geq 0} \text{supp}(Z_T^*) = \mathbb{R}^+$ .*

*Preuve* On commence par rappeler que

$$\begin{aligned} \ln(Z_T^*) &= \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)} X_t^{(c),i} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{d*}} \ln(Y^*(y)) (\mu^X - \nu(dy)) ds \\ &\quad + T \left[ -\frac{1}{2} {}^\top \beta^* c \beta^* + \int_{\mathbb{R}^{d*}} (\ln(Y^*(y)) - (Y^*(y) - 1) \nu(dy)) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

(i) Si  ${}^\top \beta^* c \beta^* \neq 0$ , on obtient par le Théorème 3.18,j) que  $\text{supp}(\ln(Z_T^*)) = \mathbb{R}$  et donc que  $\text{supp}(Z_T^*) = \mathbb{R}^+$ .

(ii) On suppose maintenant que l'intérieur de  $\text{supp}(\nu)$  est non-vide. En fixant un élément  $x_0 \in \text{supp}(Z_T^*)$  dans (3.29), on obtient

$$Y^*(y) = \frac{1}{x_0} (f')^{-1}(f'(x_0) + \phi(x_0) \sum_{i=1}^d \alpha_i (e^{y_i} - 1)) \quad (3.35)$$

ce qui implique que la fonction  $Y^*$  est continue, et strictement monotone en chaque variable  $y_i$ . On a alors

$$\text{supp}(\nu^{\ln Z^*}) = \{\ln(Y^*(y)), y \in \text{supp}(\nu)\}.$$

Si cet ensemble vérifie les conditions j), jj) ou jjj) du Théorème 3.18, alors la propriété ii) est vérifiée. On montre maintenant que ceci est plus généralement vrai dès que l'intérieur du support de  $\nu$  est non-vide.

Soit  $K$  un compact d'intérieur non-vide inclus dans  $\text{supp}(\nu)$  et soit  $\epsilon > 0$  tel que  $K \cap \nu(\{|y| > \epsilon\}) \neq \emptyset$ . Comme  $Y^*$  est continue,  $\ln(Y^*(K))$  est un compact de  $\mathbb{R}$  qui ne peut être réduit à un point car  $Y$  est strictement monotone. Il existe donc un intervalle  $I_1 = [a_1, b_1]$  de  $\mathbb{R}^+$  (par exemple) tel que

$$I_1 \subseteq \ln(Y^*(K \cap \{|y| > \epsilon\})).$$

Le support de la variable aléatoire  $\sum_{0 < s \leq T} \ln(Y^*(\Delta X_s)) \mathbf{1}_{\{|\Delta X_s| > \epsilon\}}$  contient donc l'ensemble  $\{nx, n \in \mathbb{N}, x \in I_1\}$ . Or il existe  $n_0$  tel que

$$n_0 a_1 < (n_0 - 1) b_1. \quad (3.36)$$

On a alors pour tout  $i \geq 1$ ,  $(n_0 + i) a_1 < (n_0 + i - 1) b_1$ , de sorte que  $[(n_0 - 1) a_1, +\infty[ \subseteq \{nx, n \in \mathbb{N}, x \in I_1\}$ . Comme les sauts de taille inférieure et supérieure à  $\epsilon$  sont indépendants, on en déduit qu'il existe également un intervalle de la forme  $[A, +\infty[$  dans le support de  $\ln(Z_T^*)$ .

Si  $I_1$  est inclus dans  $\mathbb{R}^-$ , on obtient de la même façon un intervalle  $]0, A[ \subseteq \text{supp}(Z_T^*)$ .

On suppose maintenant que  $\ln(Y^*)$  prend à la fois des valeurs positives et négatives. Il existe donc, par exemple, un intervalle  $I_1$  de  $\mathbb{R}^+$  et  $a_2 < 0$  qui sont inclus dans le support de  $\ln(Y^*)$ . L'ensemble

$$\{nx + ma_2, (n, m) \in \mathbb{N}^2, x \in I_1\}$$

doit alors être inclus dans le support de  $\sum_{0 < s \leq T} \ln(Y^*(\Delta X_s)) \mathbf{1}_{\{|\Delta X_s| > \epsilon\}}$ . Or, nous avons vu qu'il existe un intervalle de la forme  $[A, +\infty[$  inclus dans l'ensemble  $\{nx, x \in$

$I_1\}$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un entier naturel  $m$  tel que  $x \in [A - ma_2, +\infty[$ . On en déduit que

$$\{nx + ma_2, (n, m) \in \mathbb{N}^2, x \in I_1\} = \mathbb{R}.$$

Comme les sauts de taille inférieure et supérieure à  $\epsilon$  sont indépendants, on en déduit que  $\text{supp}(\ln(Z_T^*)) = \mathbb{R}$ . On obtient le même résultat si l'intervalle  $I_1 \subseteq \mathbb{R}^-$  en choisissant  $a_2 > 0$  dans le support de  $\nu$ .

On suppose finalement que  $Z^*$  définit une mesure minimale sur tout intervalle  $[0, T]$ . Si  $\ln(Y^*(y))$  prend à la fois des valeurs positives et négatives, ou si  ${}^\top\beta^*c\beta^* \neq 0$ , alors pour tout  $t \leq T$ ,  $\text{supp}(Z_t^*) = \mathbb{R}^+$ . On considère donc le cas où  $\ln(Y^*)$  est de signe constant et où  ${}^\top\beta^*c\beta^* = 0$ . Si par exemple  $\ln(Y^*)$  est à valeurs positives, on écrit pour un  $\epsilon > 0$  fixé tel que  $\nu(\{y > \epsilon\}) > 0$ ,

$$\ln(Z_T^*) = M_T + J_T - AT$$

avec

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^t \int_{\ln Y^*(y) < \epsilon} \ln(Y^*(y)) (\mu - \nu(dy)) ds \\ J_t &= \sum_{0 \leq s \leq T} \ln(Y^*(\Delta X_s)) \mathbf{1}_{\{\ln(Y^*(\Delta X_s)) > \epsilon\}} \\ A &= \int_{\ln(Y^*(y)) > \epsilon} \left( (Y^*(y) - 1) - \ln(Y^*(y)) \mathbf{1}_{\{\ln(Y^*(y)) < \epsilon\}} \right) \nu(dy). \end{aligned}$$

On rappelle que pour tout  $t \leq T$ ,

$$[(n_0 - 1)a_1, +\infty[ \subseteq \text{supp}(J_T)$$

où  $n_0$  est défini en (3.36). Ainsi,

$$[(n_0 - 1)a_1 - AT, +\infty[ \subseteq \text{supp}(J_T - AT).$$

De plus,  $M$  est une martingale non nulle et d'espérance nulle, de sorte que  $\text{supp}(M_T) \cap ]-\infty, 0] \neq \emptyset$ . Comme  $M_T$  et  $J_T$  sont indépendantes, on en déduit que pour  $x(T) \in \text{supp}(M_T)$ ,  $x(T) < 0$ , on a

$$[(n_0 - 1)a_1 - AT + x(T), +\infty[ \subseteq \text{supp}(\ln(Z_T^*)).$$

On en déduit donc

$$\mathbb{R} = \bigcup_{T \geq 0} [(n_0 - 1)a_1 - AT + x(T), +\infty[ \subseteq \text{supp}(\ln(Z_T^*)).$$

Si maintenant  $Y^*$  est à valeurs négatives, on choisit  $\epsilon$  de sorte que

$$\int_{-\epsilon < \ln(Y^*(y)) < 0} (Y^*(y) - 1 - \ln(Y^*(y))) \nu(dy) < \int_{\ln(Y^*(y)) < -\epsilon} (1 - Y^*(y)) \nu(dy)$$

et on raisonne de même.  $\square$



### 3.3.5 Preuve du Théorème 3.2, 1er cas : $\text{supp}(\nu)$ est d'intérieur non-vidé

On en vient maintenant à la preuve du Théorème 3.2. On suppose donc que  $f$  est une fonction convexe de classe  $\mathcal{C}^3$ . On considère un processus de Lévy  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  tel que l'intérieur du support de sa mesure de Lévy  $\nu$  est non-vidé et on suppose qu'il existe une mesure martingale  $f$ -minimale  $Q^*$  qui appartient à  $\mathcal{K}$  et qui préserve la structure de Lévy.

*Preuve du Théorème 3.2* Par hypothèse, il existe des intervalles  $I_1, \dots, I_d$  tels que  $I = I_1 \times \dots \times I_d \subseteq \text{supp}(\nu)$ .

D'après le Lemme 3.19, il existe alors un intervalle  $J$  inclus dans  $\text{supp}(Z_T^*)$ . De plus, par le Lemme 3.16, il existe une fonction dérivable  $\phi$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  tels que pour tout  $x \in \text{Supp}(Z_T^*)$  et tout  $y \in \text{supp}(\nu)$ ,

$$f'(xY^*(y)) - f'(x) = \Phi(x) \sum_{i=1}^d \alpha_i (e^{y_i} - 1). \quad (3.37)$$

Cette égalité est en particulier vérifiée pour tout  $y \in I$  et tout  $x \in J$ . D'autre part, pour un  $x_0 \in \text{supp}(Z_T^*)$ ,  $x_0 \neq 0$ , fixé, on a d'après (3.35),

$$Y^*(y) = \frac{1}{x_0} (f')^{-1}(f'(x_0) + \Phi(x_0) \sum_{i=1}^d \alpha_i (e^{y_i} - 1))$$

de sorte que  $Y^*$  est dérivable et monotone en chacune des variables. Pour un  $i \leq d$  fixé, on obtient en dérivant (3.37) par rapport à  $y_i$  que pour tout  $x \in J$  et tout  $y \in I$ ,

$$\frac{\Phi(x_0)}{x_0} f''(xY^*(y)) = f''(x_0Y^*(y)) \frac{\Phi(x)}{x}. \quad (3.38)$$

En dérivant cette nouvelle expression par rapport à  $x$  d'une part, et par rapport à  $y_i$  d'autre part, on obtient le système

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}(x_0)Y^*(y)f'''(xY^*(y)) = f''(x_0Y^*(y))\tilde{\Phi}'(x) \\ \tilde{\Phi}(x_0)x\frac{\partial}{\partial y_i}Y^*(y)f'''(xY^*(y)) = \frac{\partial}{\partial y_i}Y^*(y)x_0f''(x_0Y^*(y))\tilde{\Phi}(x) \end{cases} \quad (3.39)$$

où  $\tilde{\Phi}(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$ . En particulier, il existe une constante  $\gamma \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in J$ ,

$$\frac{\tilde{\Phi}'(x)}{\tilde{\Phi}(x)} = \frac{\gamma}{x}.$$

On en déduit qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $x \in J$ ,  $\tilde{\Phi}(x) = ax^\gamma$ . Il découle alors de (3.38) et (3.39) que pour tout  $x \in J$  et tout  $y \in I$ ,

$$\frac{f'''(xY^*(y))}{f''(xY^*(y))} = \frac{\gamma}{xY^*(y)}$$

et donc que  $f''(xY^*(y)) = a(xY^*(y))^\gamma$ .

Il nous reste à montrer que l'on a  $f''(x) = ax^\gamma$  pour tout  $x \in \text{supp}(Z_T^*)$ . On commence par remarquer que par le Lemme 3.19, on peut choisir  $J$  de la forme

$[A, +\infty[$  ou  $]0, A]$ . On suppose par exemple que  $J = [A, +\infty[$ . Il existe alors une constante  $A'$  telle que pour tout  $z \geq A'$ ,  $f''(z) = az^\gamma$ . On a donc pour tout  $z \geq A'$ ,

$$f'(z) = \begin{cases} \frac{a}{\gamma+1} z^{\gamma+1} + b & \text{si } \gamma \neq -1 \\ a \ln(z) + b & \text{si } \gamma = -1. \end{cases} \quad (3.40)$$

Soit maintenant  $x \in \text{supp}(Z_T^*)$ ,  $x < A'$ . Soit  $y$  et  $\bar{y}$  dans  $\text{supp}(\nu)$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que

$$xY^*(y)^n \geq A' \text{ et } xY^*(y)^{n-2}Y^*(\bar{y})^2 \geq A'.$$

Par (3.37), on a

$$\begin{cases} f'(xY^*(y)^{n-1}) = f'(xY^*(y)^n) - \Phi(xY^*(y)^{n-1})(\sum_{i=1}^d (e^{y_i} - 1)) \\ f'(xY^*(y)^{n-1}) = f'(xY^*(y)^{n-1}Y^*(\bar{y})) - \Phi(xY^*(y)^{n-1})(\sum_{i=1}^d (e^{\bar{y}_i} - 1)). \end{cases}$$

On en déduit que  $\Phi(xY^*(y)^{n-1}) = a(xY^*(y)^{n-1})^{\gamma+1}$  puis que (3.40) est vérifié pour  $z = xY^*(y)^{n-1}$ . On obtient le même résultat pour  $z = xY^*(y)^{n-2}Y^*(\bar{y})$ .

En itérant le procédé, on obtient de proche en proche que pour tout  $k \leq n$ , (3.40) est vérifié pour  $z = xY^*(y)^{n-k}$  et donc en particulier pour  $z = x$ . Ainsi,  $f'$  coïncide sur le support de  $Z_T^*$  avec une fonction qui vérifie  $f''(x) = ax^\gamma$ .  $\square$

### 3.3.6 Preuve du Théorème 3.2, 2eme cas : la matrice $c$ est inversible

Dans le cas précédent, on a obtenu la forme de la fonction  $f$  par dérivation de la fonction  $Y^*$ . Ceci n'est bien sûr plus possible lorsque le support de  $\nu$  n'est nulle part dense. On peut cependant montrer par une méthode différente que sous l'hypothèse  $c$  inversible, on a encore nécessairement  $f''(x) = ax^\gamma$ . Cette preuve est plus complexe, mais elle permet de considérer des cas intéressants, notamment la somme d'un mouvement Brownien et d'un nombre fini de processus de Poisson.

*Preuve du Théorème 3.2* On suppose donc que la matrice  $c$  est inversible. D'après le Lemme 3.16, on a presque sûrement,

$$f'(Z_{T-}^* Y^*(y)) - f'(Z_{T-}^*) = Z_{T-}^* f''(Z_{T-}^*) \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)} (e^{y_i} - 1).$$

Comme le support de la loi de  $Z_{T-}^*$  est dans ce cas  $\mathbb{R}^{+*}$ , on a pour tout  $x > 0$  et tout  $y \in \text{supp}(\nu)$ ,

$$f'(xY^*(y)) - f'(x) = x f''(x) \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)} (e^{y_i} - 1). \quad (3.41)$$

Soit  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < 1$ . On associe à  $a \in \mathbb{R}$  et  $b > 0$  l'espace vectoriel

$$V_{a,b} = \left\{ \phi \in \mathcal{C}^1\left([\epsilon(1 \wedge b), \frac{1 \vee b}{\epsilon}]\right), \text{ tel que pour tout } x \in [\epsilon, \frac{1}{\epsilon}], \phi(bx) - \phi(x) = ax\phi'(x) \right\}$$

et on remarque que par (3.41), il existe  $a, b$  tels que  $f' \in V_{a,b}$ . Or  $V_{a,b}$  est un sous-espace fermé de l'espace de fonctions continues  $\mathcal{C}([\epsilon(1 \wedge b), \frac{1 \vee b}{\epsilon}], \|\cdot\|_\infty)$ . En effet, si

$(\phi_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'éléments de  $V_{a,b}$  qui converge vers une fonction  $\phi$ , on note  $\tilde{\phi}$  la fonction telle  $\tilde{\phi}(x) = \frac{\phi(bx) - \phi(x)}{ax}$ . On a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi'_n - \tilde{\phi}\|_{\infty} \leq \frac{2}{\epsilon(1 \vee b)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n - \phi\|_{\infty} = 0.$$

On en déduit que  $\phi$  est dérivable et que  $\phi' = \tilde{\phi}$ . Ainsi, la fonction  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie pour tout  $x \in [\epsilon, \frac{1}{\epsilon}]$ ,

$$\phi(bx) - \phi(x) = ax\phi'(x) \quad (3.42)$$

et la fonction limite  $\phi$  appartient à  $V_{a,b}$  :  $V_{a,b}$  est donc un espace vectoriel fermé.

D'autre part, soit  $\phi \in V_{a,b}$  et  $x, y \in [\epsilon, \frac{1}{\epsilon}]$  :

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sup_{x \in [\epsilon, \frac{1}{\epsilon}]} |\phi'(x)| |x - y| \leq \sup_{x \in [\epsilon, \frac{1}{\epsilon}]} \frac{|\phi(bx) - \phi(x)|}{|ax|} |x - y| \leq \frac{2\|\phi\|_{\infty}}{|a|\epsilon} |x - y|$$

La boule unité de  $V_{a,b}$  est donc équicontinue, donc relativement compacte et par le théorème de Riesz,  $V_{a,b}$  doit être un espace vectoriel de dimension finie.

D'autre part, on peut remarquer que si  $\phi$  appartient à  $V_{a,b}$ , la fonction  $x \mapsto x\phi'(x)$  appartient également à  $V_{a,b}$ . En effet, on déduit de (3.42) que si  $\phi \in V_{a,b}$ , alors  $x \mapsto x\phi'(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus, en dérivant (3.42) et en multipliant par  $x$ , on obtient

$$bx\phi'(bx) - x\phi'(x) = ax(\phi'(x) + x\phi''(x))$$

et  $x \mapsto x\phi'(x) \in V_{a,b}$ . Ainsi, si on note  $\phi^{(i)}$  la  $i$ -ème dérivée de  $\phi$ , les fonctions  $(x^i \phi^{(i)}(x))_{i \geq 0}$  engendrent un sous-espace vectoriel de  $V_{a,b}$  qui est donc un espace vectoriel de dimension finie. En particulier, il existe  $n \in \mathbb{N}$  et des constantes réelles  $(\rho_i)_{0 \leq i \leq n}$  telles que

$$\sum_{i=0}^n \rho_i x^i \phi^{(i)}(x) = 0.$$

Les éléments de  $V_{a,b}$  sont donc des solutions d'équations différentielles d'Euler (cf [62]). Il existe des constantes réelles  $m, \mu, \theta$  et  $(a_i, b_i, c_i, d_i, \lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$  telles que pour tout  $x \in [\epsilon, \frac{1}{\epsilon}]$ ,

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{\lambda_i} + x^m \sum_{i=1}^n b_i (\ln(x))^i + x^{\mu} \sum_{i=0}^n [c_i \cos(\ln(\theta x)) + d_i \sin(\ln(\theta x))] \ln(x)^i.$$

Ceci doit en particulier être vrai de  $f'$  sur tout intervalle de la forme  $[\epsilon, \frac{1}{\epsilon}]$  et comme  $f' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ , cela doit être vrai pour tout  $x > 0$ . Or  $f$  est convexe, donc  $f'$  est croissante, ce qui implique que pour tout  $i \leq n$ ,  $c_i = d_i = 0$ . De plus, si  $\phi(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{\lambda_i}$ , on a par définition de  $V_{a,b}$  que pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i (b^{\lambda_i} - 1) x^{\lambda_i} + x^m \sum_{i=1}^n b^m (\ln(b) + \ln(x))^i - (\ln(x))^i \\ = a \sum_{i=0}^n a_i \lambda_i x^{\lambda_i} + ax^m m \sum_{i=1}^n (\ln(x))^i + ai (\ln(x))^{i-1}. \end{aligned}$$

En particulier, ceci implique que pour tout  $i \leq n$ ,  $b^{\lambda_i} - 1 = a\lambda_i$ . Ainsi, il existe au plus un exposant  $\lambda_i$  qui est non nul. D'autre part, en prenant  $x = 1$ , on obtient pour  $i \geq 2$ ,

$$\sum_{i=2}^n b^m \ln(b)^i = 0$$

Ceci n'est possible que si  $b = 1$ , dans quel cas  $f'$  est constante et on a bien  $f''(x) = ax^\gamma$ . Sinon, on a pour tout  $i \geq 2$ ,  $b_i = 0$ . De plus, on a alors

$$(b^m - 1 - am) \ln(x) + b^m \ln(b) - a = 0$$

ce qui implique en particulier que  $b^m = 1 + am$  et donc  $(1 + am) \ln(1 + am) = am$ , et donc que  $m = 0$ . Finalement, on a

$$f'(x) = a_0 + a_1 x^\lambda + b_1 \ln(x).$$

Pour obtenir  $f''(x) = ax^\gamma$ , il reste donc à montrer que  $a_1 = 0$  ou  $b_1 = 0$ . Si on suppose que les deux sont non nuls, on obtient que pour tout  $x > 0$ ,

$$ax^\lambda(Y^{*\lambda}(y) - 1 - \lambda \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)}(e_i^y - 1)) + b(\ln(Y^*(y)) - \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)}(e^{y_i} - 1)) = 0$$

et donc que

$$Y^{*\lambda}(y) = 1 + \lambda \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)}(e^{y_i} - 1) \text{ et } \ln(Y^*(y)) = \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)}(e^{y_i} - 1).$$

Ceci implique  $\beta^* = 0$  et donc  $Y^* = 1$ , ce qui est impossible car on a supposé que  $P$  n'est pas une mesure martingale. Ainsi, il existe  $a > 0$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x > 0$ ,  $f''(x) = ax^\gamma$ .  $\square$

### 3.3.7 Preuve du Théorème 3.1 : Mesure minimale pour les fonctions de la forme $f''(x) = ax^\gamma$

On suppose maintenant que  $f''(x) = ax^\gamma$  et on obtient des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une mesure minimale ainsi qu'une expression explicite de ses paramètres de Girsanov. On considère un modèle de Lévy exponentiel associé à un processus de Lévy quelconque, de caractéristiques  $(b, c, \nu)$ .

*Preuve du Théorème 3.1* On suppose d'abord qu'il existe une mesure minimale  $Q^*$  et on montre qu'elle vérifie les conditions du Théorème 3.1. Nous avons déjà rappelé qu'il a été montré dans ([29],[49]), que les mesures minimales associées aux fonctions  $f(x) = x \ln(x)$ ,  $f(x) = x^q$ ,  $q > 1$  ou  $q < 0$  et  $f(x) = -\ln(x)$  préservent la propriété de Lévy. Comme toutes les fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$  sont de la forme

$$f(x) = a_1 \hat{f}(x) + a_2 x + a_3$$

où  $\hat{f}$  est une des trois fonctions  $\hat{f}(x) = x \ln(x)$ ,  $\hat{f}(x) = x^q$ ,  $\hat{f}(x) = -\ln(x)$ , la mesure minimale  $Q^*$  préserve aussi nécessairement la propriété de Lévy. On montre maintenant que les conditions (3.1), (3.2) et (3.3) sont vérifiées. On note  $(\beta^*, Y^*)$  les

paramètres de Girsanov de  $Q^*$  et on commence par montrer qu'ils doivent vérifier certaines équations. Pour cela, on rappelle que si  $\gamma \neq -1, -2$ , il existe des constantes  $A_1, A_2, A_3, B_1$  telles que

$$f(x) = A_1 x^{\gamma+2} + A_2 x + A_3 \text{ et } f'(x) = B_1 x^{\gamma+1} + A_2.$$

De même, si  $\gamma = -1$ , on a

$$f(x) = A_1 x \ln(x) + A_2 x + A_3 \text{ et } f'(x) = A_1 \ln(x) + A_2 + A_1$$

et si  $\gamma = -2$ ,

$$f(x) = A_1 \ln(x) + A_2 x + A_3 \text{ et } f'(x) = \frac{A_1}{x} + A_2.$$

Ainsi, dans tous les cas, il existe des constantes positives  $b_1, b_2, b_3$  et  $c_1, c_2, c_3$  telles que pour tout  $x > 0$ ,

$$x|f'(x)| \leq b_1|f(x)| + b_2 x + b_3 \text{ et } x^2 f''(x) \leq c_1|f(x)| + c_2 x + c_3.$$

La première inégalité implique que la mesure minimale  $Q^*$  vérifie  $E_{Q^*}[|f'(Z_T)|] < +\infty$  et donc, par le Lemme 3.13, pour tout  $x > 0$ ,  $E_{Q^*}[|f'(xZ_T^*)|] < +\infty$ . De plus, par le Lemme 3.14, la deuxième inégalité implique que  $Q^*$  vérifie nécessairement

$$\sup_{t \leq T} \sup_{x \in K} E_P[f''(xZ_t)Z_t^2] < +\infty.$$

La mesure minimale  $Q^*$  doit donc vérifier les conditions d'intégrabilité (3.8). Ainsi, par le Lemme 3.16, on doit avoir pour tout  $x \in \text{supp}(Z_T^*)$  et tout  $y \in \text{supp}(\nu)$ ,

$$f'(xY^*(y)) - f'(x) = \phi(x) \sum_{i=1}^d \alpha_i (e^{y_i} - 1).$$

Or comme  $f''(x) = ax^\gamma$ , on a pour tout  $x, u > 0$ ,

$$f'(xu) - f'(x) = ax^{\gamma+1}(f'(u) - f'(1)).$$

On en déduit que

$$\phi(x) \sum_{i=1}^d \alpha_i (e^{y_i} - 1) = ax^{\gamma+1}(f'(Y^*(y)) - f'(1))$$

et donc en fixant  $x_0 \in \text{supp}(Z_T^*)$ , il existe un vecteur  $\beta$  tel que

$$f'(Y^*(y)) = f'(1) + \sum_{i=1}^d \beta_i (e^{y_i} - 1). \quad (3.43)$$

De plus, si  $c \neq 0$ , par le Lemme 3.16, le premier paramètre de Girsanov  $\beta^*$  de  $Q^*$  doit vérifier

$$f'(Y^*(y)) = f'(1) + \sum_{i=1}^d (\beta^{*i} + V_i)(e^{y_i} - 1)$$

où  $V$  est tel que  $cV = 0$ . Ainsi, on doit avoir  $\beta^* = \beta + V$ . On vérifie maintenant que les conditions (3.1), (3.2) et (3.3) sont vérifiées. Tout d'abord, pour que  $Q^*$  soit équivalente à  $P$ , on doit avoir par le Théorème 1.18,  $Y^*(y) > 0$  ( $\nu$ -pp). Par (3.43), et comme  $f'$  est strictement croissante, ceci est équivalent à

$$f'(1) + \sum_{i=1}^d \beta_i(e^{y_i} - 1) > f'_+(0) \quad (\nu - pp),$$

c'est-à-dire à (3.1). De plus, pour que  $E_{Q^*}[S_T] < +\infty$ , on doit avoir

$$\sum_{i=1}^d \int_{|y| \geq 1} (e^{y_i} - 1) Y^*(y) \nu(dy) < +\infty$$

ce qui est exactement la condition (3.2). Finalement,  $Q^*$  sera une mesure martingale si

$$b + \frac{1}{2} \text{diag}(c) + c\beta^* + \int_{\mathbb{R}^{d*}} (e^y - 1) Y^*(y) - h(y) \nu(dy) = 0.$$

Par (3.43) et en utilisant le fait que  $c\beta^* = c\beta$ , ceci est équivalent à (3.3).

On suppose maintenant qu'il existe un vecteur  $\beta^*$  qui vérifie les conditions (3.1), (3.2) et (3.3) et on considère un intervalle de temps fixé quelconque  $[0, T]$ . On définit la fonction

$$Y^*(y) = (f')^{-1}(f'(1) + \sum_{i=1}^d \beta^{*i}(e^{y_i} - 1))$$

de sorte que  $(\beta^*, Y^*)$  sont les paramètres de Girsanov d'une mesure  $Q^* \in \mathcal{M}'$ . On cherche à montrer que  $Q^*$  est bien la mesure  $f$ -minimale. On rappelle que comme la fonction  $Q \mapsto f(Q||P)$  est strictement convexe, la mesure minimale, si elle existe, est unique.

On commence par considérer le cas  $\gamma = -1$  : l'hypothèse (3.2) implique que

$$\int_{\mathbb{R}^{d*}} \left( Y^*(y) \ln(Y^*(y)) - (Y^*(y) - 1) \right) \nu(dy) < +\infty.$$

On a donc  $E_P[f(Z_T^*)] < +\infty$  et  $E_{Q^*}[f'(Z_T^*)] < +\infty$  et  $Q^* \in \mathcal{K}$ . De plus, par la formule d'Itô,

$$f'(Z_T^*) = E_{Q^*}[f'(Z_T^*)] + \beta \hat{X}_T$$

où  $S = \mathcal{E}(\hat{X})$ . Le processus  $\hat{X}$  est alors une martingale sous toute mesure martingale équivalente  $Q$  pour  $S$ , et donc

$$E_Q[f(Z_T^*)] = E_{Q^*}[f(Z_T^*)].$$

Donc, d'après le Théorème 3.7,  $Q^*$  est  $f$ -minimale.

On suppose maintenant que  $\gamma \neq -1$ . Il existe donc des constantes réelles  $A$  et  $B$  telles que

$$f'(x) = Ax^{\gamma+1} + B.$$

L'hypothèse (3.2) implique maintenant que  $E_{Q^*}[Z_T^{*\gamma+1}] < +\infty$ . Comme  $f$  est convexe,  $f(x) \leq xf'(x)$  et donc  $E_P[f(Z_T^*)] < +\infty$ . De plus, par la formule d'Itô, il existe un réel  $\psi$  tel que

$$Z_t^{*\gamma+1} = \int_0^t Z_{s-}^{*\gamma+1} \beta d\hat{X}_s + \int_0^t Z_{s-}^{*\gamma+1} \psi ds.$$

On en déduit que

$$Z_T^{*\gamma+1} = e^{\psi T} \mathcal{E}(N)_T$$

où  $N = \beta \hat{X}$ . Puisque  $\mathcal{E}(N)$  est une martingale locale sous toute mesure  $Q \in \mathcal{M}$ , et comme  $N$  est un processus de Lévy,  $\mathcal{E}(N)$  est une  $Q$ -martingale. On en déduit que

$$E_Q[Z_T^{*\gamma+1}] = e^{\psi T} = E_{Q^*}[Z_T^{*\gamma+1}]$$

On peut donc à nouveau déduire du Théorème 3.7 que  $Q^*$  est  $f$ -minimale.  $\square$

### 3.3.8 Un contre-exemple lorsque $c$ n'est pas inversible

On considère la fonction convexe  $f$  de classe  $\mathcal{C}^3$ , définie pour tout  $x > 0$  par  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \ln(x) - x$  et le processus de Lévy à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$X_t = (W_t + \ln(2)P_t, W_t + \ln(3)P_t - t)$$

où  $W$  est un mouvement Brownien standard à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $P$  un processus de Poisson à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Nous allons montrer que bien que  $f''$  ne soit pas de la forme  $f''(x) = ax^\gamma$ , le modèle admet une mesure  $f$ -minimale qui préserve la propriété de Lévy. Notons que la matrice de covariance  $c$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et n'est donc pas inversible. De plus, le support de  $\nu$  est réduit au point  $a = (\ln(2), \ln(3))$ , et n'est donc nulle-part dense.

Soit  $Q$  une mesure martingale équivalente, donnée par les paramètres de Girsanov  $(\beta, Y)$ , avec  ${}^\top \beta = (\beta_1, \beta_2)$ . Par le Théorème 1.18, on doit avoir

$$\begin{aligned} \ln(2) + \frac{1}{2} + \beta_1 + \beta_2 + Y(a) &= 0 \\ \ln(3) - \frac{1}{2} + \beta_1 + \beta_2 + 2Y(a) &= 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

et donc  $Y(a) = 1 - \ln(\frac{3}{2})$ . De plus, pour que  $Q$  soit minimale, on doit avoir par le Lemme 3.16 pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(xY(a)) - f'(x) = xf''(x) \left( \sum_{i=1}^2 \beta_i (e^{a_i} - 1) + \sum_{i=1}^2 v_i (e^{a_i} - 1) \right)$$

où  $v = (v_1, -v_1)$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 0 pour la matrice  $c$ . Pour le modèle considéré et la fonction  $f$  donnée, ceci s'écrit

$$\ln(Y(a)) + x(Y(a) - 1) = (x+1)(\beta_1 + 2\beta_2) - v_1$$

et donc pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = Y(a) - 1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 - v_1 = \ln(Y(a)). \end{cases}$$

Par (3.44), ceci entraîne

$$\begin{cases} v_1 = -\ln(1 - \ln(\frac{3}{2})) - \ln(\frac{3}{2}) \\ \beta_1 = 3\ln(3) - 5\ln(2) - 3 \\ \beta_2 = \frac{3}{2} + 3\ln(2) - 2\ln(3). \end{cases}$$

Comme  $\beta$  et  $Y$  ne dépendent pas de  $(\omega, t)$ , la mesure martingale  $Q^*$  associée aux paramètres de Girsanov  $(\beta, Y)$  préserve la structure de Lévy de  $X$ . Vérifions maintenant que  $Q^*$  est bien minimale. Notons que la décomposition du Lemme 3.15 s'écrit ici

$$f'(Z_T^*) = E_{Q^*}[f'(Z_T^*)] + \sum_{i=1}^2 \int_0^T \left( \beta_i(1 + Z_{s-}^* E_{Q^*}[Z_{T-s}^*]) + v_i \right) \frac{dS_s^i}{S_{s-}^i}.$$

Soit  $Q$  une mesure martingale quelconque. On a

$$E_Q[f'(Z_T^*)] = E_{Q^*}[f'(Z_T^*)] + E_Q[(\beta + v) \cdot \hat{X}]_T + \sum_{i=1}^2 E_Q \left[ \int_0^T Z_{s-}^* E_{Q^*}[Z_{T-s}^*] \beta_i \frac{dS_s^i}{S_{s-}^i} \right]$$

où  $\hat{X}$  est le processus de Lévy tel que  $S = \mathcal{E}(\hat{X})$ . Comme  $\hat{X}$  est une martingale sous toute mesure martingale  $Q$ ,  $E_Q[(\beta + v) \cdot \hat{X}]_T = 0$ . D'autre part, on peut noter que

$$Z_T^* = E_{Q^*}[Z_T^*] + \sum_{i=1}^2 E_Q \left[ \int_0^T Z_{s-}^* E_{Q^*}[Z_{T-s}^*] \beta_i d \frac{S_s^i}{S_{s-}^i} \right]$$

On a donc  $Z_T^* = E_{Q^*}[Z_T^*](\mathcal{E}(\beta \hat{X})_T)$ . Comme  $\mathcal{E}(\beta \hat{X})$  est une martingale sous toute mesure martingale  $Q$ , on en déduit que  $E_Q[Z_T^*] = E_{Q^*}[Z_T^*]$ . Finalement, pour toute mesure martingale  $Q$ ,  $E_Q[f'(Z_T^*)] = E_{Q^*}[f'(Z_T^*)]$ , donc par le Théorème 3.7,  $Q^*$  est bien minimale.

On a ainsi obtenu un modèle de Lévy exponentiel et une fonction convexe  $f$  pour lequel une mesure  $f$ -minimale existe et préserve la structure de Lévy bien que  $f$  ne vérifie pas  $f''(x) = ax^\gamma$ .

### 3.4 Invariance par changement d'échelle

Nous avons déjà vu que les mesures minimales associées aux fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$  ne dépendent pas de l'intervalle de temps considéré. Nous introduisons ici une notion plus forte d'invariance qui va d'abord apparaître dans la détermination de stratégies optimales et qui interviendra ensuite de façon importante dans le chapitre suivant.

**Définition 3.20** *Soit  $f$  une fonction convexe. On dit qu'une mesure martingale  $f$ -minimale  $Q^*$  est invariante par changement d'échelle si pour tout  $c > 0$  et tout  $t \geq 0$ ,  $E[|f(c \frac{dQ_t^*}{dP_t^*})|] < +\infty$  et*

$$E \left[ f \left( c \frac{dQ_t^*}{dP_t^*} \right) \right] = \inf_{Q \in \mathcal{M}} E \left[ f \left( c \frac{dQ_t}{dP_t} \right) \right]$$

On montre d'abord que cette propriété est vérifiée lorsque  $f''(x) = ax^\gamma$ .



**Proposition 3.21** *On suppose que  $f''(x) = ax^\gamma$ ,  $a > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Alors, si elle existe, la mesure minimale associée à un modèle de Lévy exponentiel est invariante par changement d'échelle.*

*Preuve* Nous avons déjà vu dans le Théorème 3.2, que si  $f''(x) = ax^\gamma$ , une mesure minimale, lorsqu'elle existe, est minimale sur tout intervalle de temps. De plus, on remarque que pour tout  $c > 0$ , il existe des constantes  $\alpha > 0$ ,  $\beta, \delta \in \mathbb{R}$  telles que pour tout  $x > 0$ ,

$$f(cx) = \alpha f(x) + \beta x + \delta$$

Ainsi, si  $Q^*$  est une mesure  $f$ -minimale, on a pour toute mesure martingale  $Q$ ,

$$E[f(c \frac{dQ}{dP})] = \alpha E[f(\frac{dQ}{dP})] + \beta + \delta \geq \alpha E[f(\frac{dQ^*}{dP})] + \beta + \delta = E[f(c \frac{dQ^*}{dP})] \quad \square$$

On peut également remarquer que cette propriété est vraie dans le cas de l'exemple développé dans la section 3.3.8.

### 3.5 Application aux stratégies optimales

On cherche maintenant à utiliser les résultats précédents pour déterminer des expressions de stratégies optimales. La dualité qui existe entre les problèmes de recherche de stratégies maximisant une utilité et de minimisation de  $f$ -divergence a par exemple été étudiée de façon générale dans [6],[34] mais aussi plus spécifiquement dans le cas d'une utilité exponentielle dans [17] et [44]. On commence par rappeler la définition de la fonction convexe conjuguée d'une fonction concave :

**Définition 3.22** *Soit  $u$  une fonction d'utilité. La fonction convexe conjuguée de  $u$  est la fonction convexe  $f$  telle que*

$$f(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{u(x) - xy\} = u(I(y)) - yI(y) \quad (3.45)$$

où  $I = (u')^{-1}$ .

On a en particulier les correspondances suivantes :

$$\begin{cases} \text{si } u(x) = \ln(x) \text{ alors } f(x) = -\ln(x) - 1 \\ \text{si } u(x) = \frac{x^p}{p}, p < 1 \text{ alors } f(x) = -\frac{p-1}{p} x^{\frac{p}{p-1}} \\ \text{si } u(x) = 1 - e^{-x} \text{ alors } f(x) = 1 - x + x \ln(x) \end{cases}$$

On rappelle que l'on note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des stratégies admissibles et que les notions de stratégies optimales et de stratégies asymptotiquement optimales sont définies de la façon suivante :

**Définition 3.23** *Une stratégie  $\hat{\phi} \in \mathcal{A}$  est  $u$ -optimale sur  $[0, T]$  si*

$$E[u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_T)] = \sup_{\phi \in \mathcal{A}} E[u(x + (\phi \cdot S)_T)].$$

*Une suite de stratégies  $(\hat{\phi}^{(n)})_{n \geq 1}$  est asymptotiquement  $u$ -optimale sur  $[0, T]$  si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[u(x + (\hat{\phi}^{(n)} \cdot S)_T)] = \sup_{\phi \in \mathcal{A}} E[u(x + (\phi \cdot S)_T)].$$

Le résultat suivant permet d'obtenir une stratégie  $u$ -optimale à partir de l'existence d'une mesure  $f$ -minimale :

**Théorème 3.24** *Soit  $u$  une fonction d'utilité de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $f_u$  sa fonction convexe conjuguée. On suppose qu'il existe une mesure  $f_u$ -minimale  $Q^*$  de densité  $Z^*$  qui est invariante par changement d'échelle et qui vérifie pour tout  $\lambda > 0$ ,*

$$E_{Q^*}[|f'(\lambda Z_T^*)|] < +\infty.$$

*Alors pour tout  $x \geq \underline{x}$ , il existe un unique réel  $\lambda$  tel que*

$$-f'_u(\lambda Z_T^*) = x + (\hat{\phi} \cdot S)_T \quad (3.46)$$

*où  $\hat{\phi}$  est un processus prévisible tel que  $\hat{\phi} \cdot S$  soit une martingale. On a alors*

$$E[u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_T)] = \sup_{\phi \in \mathcal{A}} E[u(x + (\phi \cdot S)_T)]$$

*et il existe une suite de temps d'arrêt  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  telle que  $(\hat{\phi}_{\cdot \wedge \tau_n})_{n \geq 1}$  soit asymptotiquement  $u$ -optimale. De plus, si  $\underline{x} > -\infty$ ,  $\hat{\phi}$  est une stratégie  $u$ -optimale.*

*En particulier, si  $f''_u(x) = ax^\gamma$  et que les conditions (3.1), (3.2) et (3.3) sont vérifiées, alors pour tout investissement initial fixé  $x_0 > \underline{x}$ , il existe une suite de stratégie asymptotiquement  $u$ -optimale  $(\hat{\phi}_{\cdot \wedge T_n})_{n \geq 1}$  dont les coordonnées sont données par*

$$\hat{\phi}_s^{(i)} = \alpha_{\gamma+1} \frac{Z_{s-}^{*\gamma+1}}{E_{Q^*}[Z_{s-}^{*\gamma+1}]} \frac{\beta^{*(i)}}{S_{s-}^{(i)}} \quad (3.47)$$

*où  $\alpha_{\gamma+1} = (\gamma+1)(x + f'(1)) - a$ . La stratégie  $\hat{\phi}$  est de plus optimale dès que  $\gamma \neq -1$ .*

**Remarque 1.** Le théorème 3.24 est basé sur le Théorème 5.1 dans [34]. Cependant, plutôt que d'introduire l'hypothèse  $\underline{x} > -\infty$ , on utilise la notion de suite asymptotiquement optimale, définie par Kallsen [45]. Une autre approche consisterait à élargir la classe de stratégies admissibles de sorte que  $\hat{\phi}$  y appartienne. C'est en particulier possible lorsque  $S$  est localement borné, ce qui est équivalent à supposer que la mesure de Lévy est à support compact ([69]).

**Remarque 2.** La preuve de l'optimalité (asymptotique) de la stratégie  $\hat{\phi}$  lorsqu'il existe une décomposition de la forme (3.46) ne fait pas intervenir la structure particulière des processus de Lévy et est plus généralement vraie pour tous les modèles de semimartingales.

*Preuve du Théorème 3.24* Par hypothèse, on a pour tout  $\lambda > 0$ ,  $E[|f(\lambda Z_T^*)|] < +\infty$  et  $E_{Q^*}[|f'(\lambda Z_T^*)|] < +\infty$ . Comme  $f'$  est strictement croissante et continue, la fonction  $\lambda \mapsto E_{Q^*}[f'(\lambda Z_T^*)]$  est également strictement croissante et continue. On a de plus  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E_{Q^*}[f'(\lambda Z_T^*)] = -\infty$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_{Q^*}[f'(\lambda Z_T^*)] = \underline{x}$ . Ainsi, pour tout  $x > \underline{x}$ , il existe un unique  $\lambda > 0$  tel que  $-E_{Q^*}[f'(\lambda Z_T^*)] = x$ . Comme  $Q^*$  est minimale pour la fonction  $x \mapsto f(\lambda x)$ , par le Théorème 3.5, il existe un processus prévisible  $\hat{\phi}$  tel que

$$-f'(\lambda Z_T^*) = x + (\hat{\phi} \cdot S)_T$$

et de plus  $\hat{\phi} \cdot S$  définit une  $Q^*$ -martingale. Par définition de la fonction convexe conjuguée, on a

$$E[u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_T)] \leq E[f(\lambda Z_T^*)] + E[Z_T^* |f'(\lambda Z_T^*)|] < +\infty.$$

Si maintenant  $\phi$  désigne une stratégie admissible quelconque, on a par définition de  $f_u$ ,

$$\begin{aligned} u(x + (\phi \cdot S)_T) &\leq (x + (\phi \cdot S)_T) \lambda Z_T^* + f(\lambda Z_T^*) \\ &\leq (x + (\phi \cdot S)_T) \lambda Z_T^* + u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_T) - \lambda Z_T^* f'(\lambda Z_T^*). \end{aligned}$$

En prenant l'espérance,

$$E[u(x + (\phi \cdot S)_T)] \leq E[u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_T)] + \lambda E_{Q^*}[(\phi \cdot S)_T]$$

Or, sous  $Q^*$ ,  $\phi \cdot S$  est une martingale locale minorée, donc une surmartingale, et donc  $E_{Q^*}[(\phi \cdot S)_T] \leq 0$ . On a donc

$$E[u(x + (\phi \cdot S)_T)] \leq E[u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_T)].$$

De plus, si  $\underline{x} > -\infty$ , on remarque que

$$(\hat{\phi} \cdot S)_T \geq \underline{x} - x.$$

$\hat{\phi}$  définit alors une stratégie admissible, et est donc une stratégie  $u$ -optimale.

Si maintenant  $\underline{x} = -\infty$ , on considère une suite de temps d'arrêt  $(T_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$T_n = \inf\{t \geq 0, (\phi \cdot S)_t \leq -n \text{ ou } < \phi_t, S_t > \leq -n\}$$

avec  $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ , et on considère la suite de processus  $(\hat{\phi}_{\cdot \wedge T_n})_{n \geq 1}$ . Notons que pour chaque  $n$ ,  $(\hat{\phi}_{\cdot \wedge T_n})$  définit une stratégie admissible. En effet,

$$(\hat{\phi} \cdot S)_{T \wedge T_n} = (\hat{\phi} \cdot S)_{T^- \wedge T_n^-} + \sum_{i=1}^d \hat{\phi}_{T^- \wedge T_n^-}^{(i)} S_{T^- \wedge T_n^-}^{(i)} \Delta \hat{X}_{T \wedge T_n}^{(i)}$$

où  $\hat{X}$  est tel que  $S = \mathcal{E}(\hat{X})$ . Comme  $\Delta \hat{X} \geq -1$ , on en déduit que

$$(\hat{\phi} \cdot S)_{T \wedge T_n} \geq -2n$$

et donc que  $\hat{\phi}_{\cdot \wedge T_n}$  définit une stratégie admissible. En utilisant maintenant la concavité de  $u$ , on a pour tout  $n \geq 1$ ,

$$u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_{T \wedge T_n}) \leq u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_T) + u'(x + (\hat{\phi} \cdot S)_T)((\hat{\phi} \cdot S)_T - (\hat{\phi} \cdot S)_{T \wedge T_n}).$$

En prenant la valeur absolue, et en utilisant le fait que  $u' = -(f')^{-1}$ , on a alors.

$$|u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_{T \wedge T_n})| \leq |u(x + (\hat{\phi} \cdot S)_T)| + Z_T^* |(\hat{\phi} \cdot S)_T - (\hat{\phi} \cdot S)_{T \wedge T_n}|.$$

Or  $\hat{\phi} \cdot S$  est une  $Q^*$ -martingale uniformément intégrable, donc la famille  $((\hat{\phi} \cdot S)_{T \wedge T_n})_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable par rapport à  $P$ . On en déduit en particulier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[u(x + (\hat{\phi} \mathbf{1}_{\{\cdot \leq T_n\}} \cdot S)_T)] = E[u(x + \hat{\phi} \cdot S)_T].$$

Ainsi, la suite  $(\hat{\phi} \mathbf{1}_{\{\cdot \leq T_n\}})_{n \geq 1}$  est asymptotiquement  $u$ -optimale.

On suppose maintenant que  $f''(x) = ax^\gamma$  et que (3.1), (3.2) et (3.3) sont vérifiées. D'après le Théorème 3.2, il existe alors une mesure martingale  $f$ -minimale  $Q^*$  dont les paramètres de Girsanov sont

$$\beta^* \text{ et } Y^*(y) = (f')^{(-1)}(f'(1) + \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)}(e^{y_i} - 1)).$$

Par la Proposition 3.21, cette mesure est également invariante par changement d'échelle. Soit  $\lambda > 0$  tel que  $E_{Q^*}[f'(\lambda Z_T^*)] = -x$ . La décomposition du Lemme 3.15 pour  $f'(\lambda Z_T^*)$  s'écrit

$$-f'(\lambda Z_T^*) = x - a\lambda^{\gamma+1} \sum_{i=1}^d \beta^{*(i)} \int_0^T Z_{s-}^{*\gamma+1} E_{Q^*}[Z_s^{*\gamma+1}] \frac{dS_s^{(i)}}{S_{s-}^{(i)}}.$$

Comme  $Z^*$  préserve la propriété de Lévy,  $E_{Q^*}[Z_{T-s}^{*\gamma+1}]E_{Q^*}[Z_s^{*\gamma+1}] = E_{Q^*}[Z_T^{*\gamma+1}]$ , et la stratégie optimale s'écrit donc

$$\hat{\phi}_s^{(i)} = -a\lambda^{\gamma+1} E_{Q^*}[Z_T^{*\gamma+1}] \frac{Z_s^{*\gamma+1}}{E_{Q^*}[Z_s^{*\gamma+1}]} \frac{\beta_s^{(i)}}{S_{s-}^{(i)}}. \quad (3.48)$$

En particulier, pour  $\gamma = -1$ , on a

$$\hat{\phi}_s^{(i)} = -\frac{a\beta_s^{(i)}}{S_{s-}^{(i)}}.$$

Si maintenant  $\gamma \neq -1$ , on rappelle que pour tout  $z > 0$ ,  $f'(z) = \frac{a}{\gamma+1}(z^{\gamma+1}-1) + f'(1)$ . En particulier, on a

$$x = -E_{Q^*}[f'(\lambda Z_T^*)] = -\frac{a\lambda^{\gamma+1}}{\gamma+1}(E_{Q^*}[Z_T^{*\gamma+1}] - 1) - f'(1)$$

ce qui entraîne

$$-a\lambda^{\gamma+1} E_{Q^*}[Z_T^{*\gamma+1}] = \frac{\gamma+1}{a}(x + f'(1)) - a.$$

Finalement, en insérant ceci dans (3.48), on obtient

$$\hat{\phi}_s^{(i)} = ((\gamma+1)(x + f'(1)) - a) \frac{Z_{s-}^{*\gamma+1}}{E_{Q^*}[Z_s^{*\gamma+1}]} \frac{\beta_s^{(i)}}{S_{s-}^{(i)}}. \quad \square$$

## Chapitre 4

# Modèles avec change-point

Dans le cadre des modèles de Lévy exponentiels, les caractéristiques du modèle sont indépendantes du temps. Cependant, toutes sortes d'événements peuvent engendrer un changement du comportement du prix d'un actif risqué. Certains de ces événements, comme la divulgation d'information dans la presse ou les variations du prix de matières premières ne dépendent pas directement du prix de l'actif lui-même, tandis que d'autres, comme le premier instant d'atteinte d'un seuil psychologique pour le prix de l'actif, en sont une fonction directe. Une façon élémentaire de modéliser ce type de phénomène peut être l'utilisation de fonctions constantes par morceaux pour les caractéristiques du modèle.

Nous nous limiterons ici à un modèle particulièrement simple : Nous considérerons en effet le cas d'un instant de change-point indépendant du prix de l'action, et nous supposerons que le prix de l'actif risqué est modélisé de part et d'autre du change-point par des modèles de Lévy exponentiels.

Le but de ce chapitre est de considérer pour un tel modèle des problèmes de minimisation sur l'ensemble des mesures martingales et leurs applications à l'étude de stratégies optimales et à la détermination de prix d'options. On commence pour cela par définir précisément le modèle. On étudie ensuite l'ensemble des mesures martingales avant de s'intéresser à la détermination de mesures  $f$ -minimales. On obtient finalement l'expression de stratégies optimales pour certaines fonctions d'utilité et des résultats concernant les prix d'options.

### 4.1 Description du modèle

#### 4.1.1 Modélisation des actifs risqués

On cherche à représenter l'évolution du prix de  $d$  actifs risqués par un modèle avec change-point. Il nous faut pour cela caractériser la loi des variations du prix de part et d'autre du change-point ainsi que la loi de l'instant de changement.

On considère donc un processus de Lévy  $\mathbb{L}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{2d}$  défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . On va représenter les variations du prix avant et après le change-point à l'aide respectivement des  $d$  premières et des  $d$  dernières composantes de  $\mathbb{L}$ . On introduit donc les processus  $L = (\mathbb{L}^{(i)})_{1 \leq i \leq d}$  et  $\tilde{L} = (\mathbb{L}^{(i)})_{d+1 \leq i \leq 2d}$ .  $L$  et  $\tilde{L}$  sont des processus de Lévy et on note  $(b, c, \nu)$  et  $(\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{\nu})$  leurs caractéristiques respectives.

L'instant de changement est modélisé par une variable aléatoire  $\tau$  de loi  $\alpha$ , indépendante de  $(L, \tilde{L})$  et à valeurs dans  $[0, T]$ . L'évènement  $\{\tau = T\}$ , qui peut avoir une probabilité positive, représente la situation où le change-point n'a pas lieu, au-moins sur l'intervalle de temps étudié.

On définit maintenant le processus  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  donné pour tout  $t \leq T$  par

$$X_t = L_{t \wedge \tau} + \tilde{L}_t - \tilde{L}_{t \wedge \tau}$$

et on modélise l'évolution du prix de  $d$  actifs risqués par le processus stochastique  $S$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  dont chaque composante est de la forme  $S^{(i)} = S_0^{(i)} e^{X^{(i)}}$ , avec  $S_0^{(i)} > 0$ . Le marché comporte également un actif non-risqué dont le prix est modélisé par la fonction

$$B_t = B_0 e^{r(t \wedge \tau) + \tilde{r}(t - t \wedge \tau)}$$

où  $r$  et  $\tilde{r}$  représentent les taux d'intérêt avant et après le change-point.

On supposera, comme dans les chapitres précédents, que les taux d'intérêt  $r$  et  $\tilde{r}$  associés aux actifs non-risqués sont nuls, que  $B_0 = 1$  et que pour tout  $i \leq d$ ,  $S_0^{(i)} = 1$ .

On rappelle que par la propriété de Markov forte,  $(\tilde{L}_{\tau+t} - \tilde{L}_\tau)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy de même loi que  $\tilde{L}$ . Notons qu'aucune hypothèse n'a été faite sur l'indépendance des processus  $L$  et  $\tilde{L}$ . Cependant, du fait de l'indépendance des accroissements de  $\mathbb{L}$ , les processus  $L_{\cdot \wedge \tau}$  et  $\tilde{L}_{\tau+} - \tilde{L}_\tau$  sont eux indépendants.

#### 4.1.2 Filtrations

On introduit maintenant deux filtrations par rapport auxquelles le processus  $X$  est adapté. On note  $\mathcal{N}$  l'ensemble des ensembles de  $\mathcal{F}$  qui sont  $P$ -négligeables. La filtration la plus naturelle du point de vue des événements observables est probablement la filtration  $\hat{\mathbb{F}}$  engendrée par  $X$  et le processus  $(\mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}})_{t \geq 0}$ . On considère la version complétée continue à droite, donnée pour tout  $t \geq 0$  par

$$\hat{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{s > t} \sigma(X_u, u \leq s) \vee \sigma(\mathbf{1}_{\{u \leq \tau\}}, u \leq s) \vee \mathcal{N}.$$

Il est cependant beaucoup plus facile de commencer par travailler avec une filtration élargie à l'instant initial et de revenir ensuite à  $\hat{\mathbb{F}}$ . On définit donc la filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  définie pour tout  $t \geq 0$  par

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_u, u \leq t) \vee \sigma(\tau) \vee \mathcal{N}.$$

On commence par vérifier que cette filtration est continue à droite.

**Lemme 4.1** *La filtration  $\mathbb{F}$  est continue à droite. Pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s.$$

*Preuve* Il nous faut montrer que pour toute variable aléatoire bornée  $Z$ ,  $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable, on a pour tout  $t \geq 0$ ,

$$E[Z | \mathcal{F}_{t+}] = E[Z | \mathcal{F}_t]$$

Comme  $\mathbb{F}$  est engendrée par  $X$  et  $\tau$ , toute fonction  $\mathcal{F}_u$ -mesurable,  $u \geq 0$ , peut être approchée par une suite de fonctions de la forme  $g(\tau, X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$  où  $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq u$ . Ces fonctions peuvent à leur tour être approchées dans  $L^1$  par des fonctions de la forme  $\prod_{i=1}^n g_i(X_{s_i})$ . Il nous suffit donc de montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tout  $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n$ , et tout  $t \geq 0$ , et toutes fonctions continues bornées  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ , on a

$$E\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_{s_i}) \middle| \mathcal{F}_{t+}\right] = E\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_{s_i}) \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Ceci est équivalent à montrer que pour tout  $(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , on a

$$\lim_{w \rightarrow t^+} E[e^{iu_0\tau + iu_1X_{s_1} + \dots + iu_nX_{s_n}} \middle| \mathcal{F}_w] = E[e^{iu_0\tau + iu_1X_{s_1} + \dots + iu_nX_{s_n}} \middle| \mathcal{F}_t].$$

Si  $s_n \leq t$ , la variable aléatoire considérée est  $\mathcal{F}_t$  mesurable, et l'égalité est donc vérifiée. Sinon, il existe un entier  $k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  tel que pour  $w$  assez proche de  $t$ ,  $s_k \leq w < s_{k+1}$ . Comme  $\tau$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable, on a alors

$$E\left[e^{iu_0\tau} \prod_{j=1}^n e^{iu_jX_{s_j}} \middle| \mathcal{F}_w\right] = e^{iu_0\tau} \prod_{j=1}^k e^{iu_jX_{s_j}} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_jX_{s_j}} \middle| \mathcal{F}_w\right]. \quad (4.1)$$

On a de plus

$$E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_jX_{s_j}} \middle| \mathcal{F}_w\right] \mathbf{1}_{\{\tau \leq w\}} = \prod_{j=k+1}^n e^{iu_jX_w} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_w)} \middle| \mathcal{F}_w\right] \mathbf{1}_{\{\tau \leq w\}}.$$

Or comme le processus  $\mathbb{L}$  est à accroissements indépendants, et  $\tau$  est indépendant de  $\mathbb{L}$ , les variables aléatoires  $(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_w)$  sont indépendantes de  $\mathcal{F}_w$  de sorte que

$$E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_jX_{s_j}} \middle| \mathcal{F}_w\right] \mathbf{1}_{\{\tau \leq w\}} = \prod_{j=k+1}^n e^{iu_jX_w} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_w)}\right] \mathbf{1}_{\{\tau \leq w\}}.$$

On note alors que comme  $\tilde{L}$  est un processus de Lévy,

$$E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_w)}\right] = \frac{E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_t)}\right]}{E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(\tilde{L}_w - \tilde{L}_t)}\right]}. \quad (4.2)$$

Comme  $\lim_{w \rightarrow t^+} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(\tilde{L}_w - \tilde{L}_t)}\right] = 1$ , et  $\lim_{w \rightarrow t^+} e^{iuX_w} = e^{iuX_t}$  p.s, on en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow t^+} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_jX_{s_j}} \middle| \mathcal{F}_w\right] \mathbf{1}_{\{\tau \leq w\}} &= e^{iuX_t} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_t)}\right] \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} \\ &= E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_jX_{s_j}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Si maintenant  $\tau > t$ , on écrit

$$\begin{aligned} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_jX_{s_j}} \middle| \mathcal{F}_w\right] \mathbf{1}_{\{\tau > w\}} &= \prod_{j=k+1}^n e^{iu_jL_w} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(L_{s_j \wedge q} - L_w)}\right] E[e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_{s_j \wedge q})} \middle| \mathcal{F}_q] \middle| \mathcal{F}_w \big|_{q=\tau} \mathbf{1}_{\{\tau > w\}}. \end{aligned}$$

On utilise alors comme précédemment l'indépendance des accroissements de  $\mathbb{L}$  pour obtenir

$$E[e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_{s_j \wedge q})} | \mathcal{F}_q] = E[e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_{s_j \wedge q})}],$$

puis

$$\begin{aligned} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(L_{s_j \wedge q} - L_w)} E[e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_{s_j \wedge q})} | \mathcal{F}_q] | \mathcal{F}_w\right] \\ = E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(L_{s_j \wedge q} - L_w)}\right]_{|q=\tau} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_{s_j \wedge q})}\right]_{q=\tau}. \end{aligned}$$

On conclut alors en utilisant (4.2), appliqué aux processus  $L$  et  $\tilde{L}$  :

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow t^+} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j X_{s_j}} | \mathcal{F}_w\right] \mathbf{1}_{\{\tau > w\}} \\ = \prod_{j=k+1}^n e^{iu_j L_t} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(L_{s_j \wedge q} - L_t)}\right]_{|q=\tau} E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j(\tilde{L}_{s_j} - \tilde{L}_{s_j \wedge q})}\right]_{|q=\tau} \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \\ = E\left[\prod_{j=k+1}^n e^{iu_j L_{s_j}} | \mathcal{F}_t\right] \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \end{aligned} \tag{4.4}$$

On obtient alors le résultat en insérant (4.3) et (4.4) dans (4.1).  $\square$

Notons que comme la variable aléatoire  $\tau$  est à valeurs dans  $[0, T]$ , on a  $\mathcal{F}_T = \hat{\mathcal{F}}_T$ . C'est cette égalité qui permettra de déduire facilement les résultats pour la filtration naturelle  $\hat{\mathbb{F}}$  des résultats pour la filtration élargie  $\mathbb{F}$ .

L'intérêt principal de la filtration élargie  $\mathbb{F}$  réside dans le lemme suivant :

**Lemme 4.2** *Le processus  $\mathbb{F}$ -adapté  $X$  est à accroissements conditionnellement indépendants relativement à  $\mathcal{F}_0$ , c'est-à-dire que pour tout  $s \leq T$ , pour toute fonction mesurable bornée  $f$  et toute fonctionnelle mesurable bornée  $g$ ,*

$$E\left[f(X_t - X_s)g((X_u)_{u \leq s}) | \mathcal{F}_0\right] = E\left[f(X_t - X_s) | \mathcal{F}_0\right] E\left[g((X_u)_{u \leq s}) | \mathcal{F}_0\right]$$

*Preuve* Comme  $\mathcal{F}_0 = \sigma(\tau)$  et  $L$  et  $\tilde{L}$  sont indépendants de  $\tau$ , on a

$$\begin{aligned} E\left[f(X_t - X_s)g((X_u)_{u \leq s}) | \mathcal{F}_0\right] \\ = E\left[f(L_{t \wedge q} - L_{s \wedge q} + \tilde{L}_t - \tilde{L}_{t \wedge q} - (\tilde{L}_s - \tilde{L}_{s \wedge q}))g((L_{u \wedge q} + \tilde{L}_u - \tilde{L}_{u \wedge q})_{u \leq s})\right]_{|q=\tau} \\ = E\left[g((L_{u \wedge q} + \tilde{L}_u - \tilde{L}_{u \wedge q})_{u \leq s}) E\left[f(L_{t \wedge q} - L_{s \wedge q} + \tilde{L}_t - \tilde{L}_{t \wedge q} - (\tilde{L}_s - \tilde{L}_{s \wedge q})) | \mathcal{F}_s\right]\right]_{|q=\tau}. \end{aligned}$$

Du fait de l'indépendance de  $\tilde{L}_{q+}$ ,  $-\tilde{L}$  et  $L$  et de l'indépendance des accroissements des deux processus, on a alors

$$\begin{aligned} E\left[f(X_t - X_s)g((X_u)_{u \leq s}) | \mathcal{F}_0\right] \\ = E\left[f(L_{t \wedge q} - L_{s \wedge q} + \tilde{L}_t - \tilde{L}_{s \wedge q} - (\tilde{L}_s - \tilde{L}_{s \wedge q}))\right]_{|q=\tau} E\left[g((L_{u \wedge q} + \tilde{L}_u - \tilde{L}_{u \wedge q})_{u \leq s})\right]_{|q=\tau} \\ = E\left[f(X_t - X_s) | \mathcal{F}_0\right] E\left[g((X_u)_{u \leq s}) | \mathcal{F}_0\right]. \quad \square \end{aligned}$$



Par le Théorème III.4.34 p.176 dans [41], cette indépendance conditionnelle des accroissements entraînent la propriété de représentation des  $\mathbb{F}$ -martingales par rapport au processus  $X$ . On rappelle que ceci signifie que toute martingale locale  $M$  relativement à  $\mathbb{F}$  s'écrit sous la forme

$$M = M_0 + H \cdot X^{(c)} + W \star (\mu^X - \nu(dx)ds)$$

où  $M_0$  est une variable aléatoire intégrable  $\tau$ -mesurable,  $H$  est un processus  $\mathbb{F}$ -prévisible et  $W$  une fonctions prévisible tels qu'il existe une suite de temps d'arrêt  $(T_n)_{n \geq 1}$  tendant vers  $+\infty$  pour laquelle

$$E \left[ \int_0^{T_n} {}^\top H_s c_s H_s ds \right] < +\infty \text{ et } E \left[ \sum_{0 < s \leq T_n} W^2(s, \Delta X_s) \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

## 4.2 Mesures martingales équivalentes

On s'intéresse maintenant aux mesures martingales équivalentes pour notre modèle avec change-point. On considère dans un premier temps l'ensemble  $\mathcal{M}^{\mathbb{F}}$  des  $\mathbb{F}$ -mesures martingales équivalentes. On cherche en particulier à décrire cet ensemble en fonction des mesures martingales équivalentes associées aux deux modèles de Lévy  $e^L$  et  $e^{\tilde{L}}$ . Comme pour les modèles de Lévy, la propriété de représentation des martingales permet également de décrire ces mesures en termes des paramètres de Girsanov de leurs densités (Proposition 4.5). On définit finalement un analogue aux mesures qui préservent la structure de Lévy et on décrit ce sous-ensemble de  $\mathcal{M}^{\mathbb{F}}$  (Propositions 4.7 et 4.8).

On commence par étudier le comportement des processus  $e^L$  et  $e^{\tilde{L}}$  sous une mesure martingale équivalente pour  $S$ .

**Lemme 4.3** *Une mesure  $Q$  appartient à  $\mathcal{M}^{\mathbb{F}}$  si et seulement si  $e^{L \wedge \tau}$  et  $e^{\tilde{L} - \tilde{L} \wedge \tau}$  sont des  $\mathbb{F}$ -martingales sous  $Q$ .*

*Preuve* On suppose que  $e^{L \wedge \tau}$  et  $e^{\tilde{L} - \tilde{L} \wedge \tau}$  sont des  $\mathbb{F}$ -martingales sous  $Q$ . Alors, pour tout  $t \leq T$ ,

$$\begin{aligned} E_Q[S_T | \mathcal{F}_t] &= \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} e^{L_\tau} E_Q[e^{\tilde{L}_T - \tilde{L}_{T \wedge \tau}} | \mathcal{F}_t] + \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} E_Q \left[ e^{L_{T \wedge \tau}} E_Q[e^{\tilde{L}_T - \tilde{L}_{T \wedge \tau}} | \mathcal{F}_\tau] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{L_{t \wedge \tau} + \tilde{L}_t - \tilde{L}_{t \wedge \tau}} \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose que  $S$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale sous  $Q$ . Alors, pour tout  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt  $\sigma$ , on a  $E_Q[S_\sigma] = 1$ , et donc en particulier  $E_Q[S_{\sigma \wedge \tau}] = E_Q[e^{L_{\sigma \wedge \tau}}] = 1$ . Ainsi,  $e^{L \wedge \tau}$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale sous  $Q$ . De plus, on a pour tout  $t \leq T$ ,

$$E_Q[e^{\tilde{L}_T - \tilde{L}_{T \wedge \tau}} | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} E_Q[e^{\tilde{L}_T - \tilde{L}_{T \wedge \tau}} | \mathcal{F}_t] \quad (4.5)$$

Or, on a d'une part,

$$\mathbf{1}_{\{t > \tau\}} E_Q[S_T | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} e^{L_\tau} E_Q[e^{\tilde{L}_T - \tilde{L}_\tau} | \mathcal{F}_t]$$

et d'autre part, comme  $S$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale sous  $Q$ ,

$$\mathbf{1}_{\{t > \tau\}} E_Q[S_T | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} S_t$$

En insérant ceci dans (4.5), on a

$$E_Q[e^{\tilde{L}_T - \tilde{L}_{T \wedge \tau}} | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} e^{\tilde{L}_t - \tilde{L}_{t \wedge \tau}}$$

de sorte que  $e^{\tilde{L}_\cdot - \tilde{L}_{\cdot \wedge \tau}}$  est bien une  $\mathbb{F}$ -martingale sous  $Q$ .  $\square$

On cherche maintenant à comparer  $\mathcal{M}^{\mathbb{F}}$  aux ensembles de mesures martingales associés aux deux modèles de Lévy associés à  $L$  et  $\tilde{L}^\tau$ . On introduit pour cela les ensembles

$$\mathcal{M}(L) = \{Q \sim P, (\frac{dQ_t}{dP_t})_{t \leq T} \text{ est } \mathbb{F}^L - \text{adapté et } e^L \text{ est une } \mathbb{F}^L\text{-martingale sous } Q\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\tilde{L}, \tau) = \{Q \sim P, (\frac{dQ_t}{dP_t})_{t \leq T} \text{ est } \mathbb{F}^{\tilde{L}_{\tau+}, -\tilde{L}_\tau} - \text{adapté et } e^{\tilde{L}_{\tau+}, -\tilde{L}_\tau} \text{ est une} \\ \mathbb{F}^{\tilde{L}_{\tau+}, -\tilde{L}_\tau}\text{-martingale sous } Q\} \end{aligned}$$

**Proposition 4.4** *Soit  $\zeta$  la densité d'un élément de  $\mathcal{M}(L)$  et  $\tilde{\zeta}$  la densité d'un élément de  $\mathcal{M}(\tilde{L}, \tau)$ . Alors pour toute fonction mesurable telle que  $E[c(\tau)] = 1$ , le processus*

$$Z_t = c(\tau) \left[ \zeta_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + \zeta_\tau \tilde{\zeta}_{t-\tau} \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} \right] \quad (4.6)$$

définit la densité d'une  $\mathbb{F}$ -mesure martingale pour  $S$ .

**Remarque 1.** L'ensemble  $\mathcal{M}^{\mathbb{F}}$  admet donc une infinité d'éléments dès que  $\tau$  n'est pas déterministe. En effet, même si  $L$  et  $\tilde{L}$  définissent des marchés complets et les ensembles  $\mathcal{M}(L)$  et  $\mathcal{M}(\tilde{L}, \tau)$  sont donc réduits à un élément, il existe une infinité de choix pour  $c$ .

**Remarque 2.** Les mesures dont la densité sont de la forme (4.6) ne décrivent bien sûr pas l'ensemble des éléments de  $\mathcal{M}^{\mathbb{F}}$ . En effet, si on considère une mesure martingale quelconque  $Q$  de densité  $Z$ ,  $(\frac{Z_t}{Z_0})_{t \geq 0}$  n'est pas nécessairement indépendant de  $\tau$ . De même,  $(\frac{Z_t}{Z_\tau})_{t \geq \tau}$  n'est pas non plus nécessairement indépendant de  $L$ .

*Preuve* On commence par montrer que  $Z$  défini en (4.6) est une  $\mathbb{F}$ -martingale sous  $P$ . Pour tout  $t \leq T$ ,

$$E[Z_T | \mathcal{F}_t] \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} c(\tau) E \left[ \zeta_\tau E[\tilde{\zeta}_{T-\tau} | \mathcal{F}_\tau] | \mathcal{F}_t \right].$$

Comme  $\tilde{L}_{\tau+}, -\tilde{L}_\tau$  est indépendant de  $\mathcal{F}_\tau$ , il en est de même pour  $\tilde{\zeta}$  et donc  $E[\tilde{\zeta}_{T-\tau} | \mathcal{F}_\tau] = 1$ . De plus,  $\zeta$  est indépendant de  $\tau$ , de sorte que

$$E[\zeta_\tau | \mathcal{F}_t] \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} = E[\zeta_q | \mathcal{F}_t^L] |_{q=\tau} \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} = \zeta_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}}$$

où la dernière égalité provient de ce que  $\zeta$  est une  $\mathbb{F}^L$ -martingale. On a donc

$$(E[Z_T | \mathcal{F}_t]) \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} Z_t.$$

De même,

$$E[Z_T | \mathcal{F}_t] \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} = \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} c(\tau) \zeta_\tau E[\tilde{\zeta}_{T-\tau} | \mathcal{F}_t] = Z_t \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}.$$

$Z$  est donc une  $\mathbb{F}$ -martingale, qui est de plus strictement positive. Elle définit donc bien la densité d'une mesure  $Q$  équivalente à  $P$ . Il reste à montrer que  $S$  est une

$\mathbb{F}$ -martingale sous  $Q$ . Pour cela, on montre de façon équivalente que  $ZS$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale sous  $P$  :

$$\mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} E[Z_T S_T | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} c(\tau) E\left[\zeta_\tau e^{L_\tau} E[\tilde{\zeta}_{T-\tau} e^{\tilde{L}_T - \tilde{L}_\tau} | \mathcal{F}_\tau] \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

On a alors comme précédemment,

$$E[\tilde{\zeta}_{T-\tau} e^{\tilde{L}_T - \tilde{L}_\tau} | \mathcal{F}_\tau] = E[\tilde{\zeta}_{T-q} e^{\tilde{L}_T - \tilde{L}_q} | \mathcal{F}_q^L]_{q=\tau} = 1$$

et comme  $\zeta$  est la densité d'une mesure martingale pour  $e^L$  relativement à  $\mathbb{F}^L$ ,

$$\mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} E[Z_T S_T | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} c(\tau) E[\zeta_\tau e^{L_\tau} | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} c(\tau) \zeta_t e^{L_t} = Z_t S_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}}.$$

De même

$$\mathbf{1}_{\{t > \tau\}} E[Z_T S_T | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} c(\tau) Z_\tau e^{L_\tau} E[\tilde{\zeta}_{T-\tau} e^{\tilde{L}_T - \tilde{L}_\tau} | \mathcal{F}_t] = Z_t S_t \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}. \quad \square$$

Puisque la propriété de représentation des martingales est vérifiée, on peut encore décrire  $\mathcal{M}^\mathbb{F}$  en termes des paramètres de Girsanov du changement de mesure :

**Proposition 4.5** *Une mesure  $Q$  équivalente à  $P$  est une mesure martingale équivalente  $\mathbb{F}$ -adaptée pour  $S$  si et seulement si sa densité  $Z$  vérifie pour tout  $t \leq T$ ,*

$$Z_t = c(\tau) \mathcal{E}\left(\int_0^\cdot \beta_s dX_s^c + \int_0^\cdot \int_{\mathbb{R}^{d*}} (Y_s(x) - 1)(\mu^X - \nu^X(dx)ds)\right)_t \quad (4.7)$$

où  $c(\tau)$  est une variable aléatoire positive  $\tau$ -mesurable telle que  $E[c(\tau)] = 1$ ,  $\beta$  est un processus  $\mathbb{F}$ -prévisible et  $Y$  une fonction prévisible qui vérifient

$$\sum_{j=1}^d \int_0^T \beta_s c_s \beta_s ds < +\infty \text{ et } \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{d*}} |h(x)(Y_s(x) - 1)| \nu(dx) < +\infty \text{ p.s.}$$

et tels que pour tout  $s \leq T$ ,

$$\begin{aligned} & \left(b + \frac{1}{2} \text{diag}(c) + c\beta_s + \int_{\mathbb{R}^{d*}} (e^x - 1) Y_s(x) - h(x) \nu(dx)\right) \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} \\ & + \left(\tilde{b} + \frac{1}{2} \text{diag}(\tilde{c}) + \tilde{c}\beta_s + \int_{\mathbb{R}^{d*}} (e^x - 1) Y_s(x) - h(x) \tilde{\nu}(dx)\right) \mathbf{1}_{\{\tau < s \leq T\}} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

*Preuve* Comme  $X$  est un processus à accroissements indépendants conditionnellement à  $\sigma(\tau)$ , par le Théorème III.5.19 p.181 dans [41], la densité de toute mesure équivalente à  $P$  doit être de la forme (4.7). De plus, par le Théorème 1.18, les processus  $e^{L \wedge \tau}$  et  $e^{\tilde{L} - \tilde{L} \wedge \tau}$  sont des martingales sous  $Q$  si et seulement si (4.8) est vérifiée.  $\square$

On définit maintenant dans le cadre des modèles avec change-point un sous-ensemble de mesures martingales équivalentes analogue aux mesures qui préservent la propriété de Lévy pour les modèles de Lévy exponentiels. On s'intéresse plus précisément aux mesures martingales sous lesquelles  $X$  définit encore un modèle de Lévy avec change-point.

**Définition 4.6** On dit qu'une mesure martingale équivalente préserve la structure du modèle avec change-point si sous la mesure  $Q$ ,

$$\mathcal{L}(X|Q) = \mathcal{L}(L_{\cdot \wedge \tau}^Q + \tilde{L}_{\cdot}^Q - \tilde{L}_{\cdot \wedge \tau}^Q)$$

où  $L^Q$  et  $\tilde{L}^Q$  sont des processus de Lévy sous  $Q$ , indépendants de la variable aléatoire  $\tau$ .

Cet ensemble se décrit simplement en termes des paramètres de Girsanov du changement de mesures.

**Proposition 4.7** Soit  $Q$  une  $\mathbb{F}$ -mesure martingale équivalente qui préserve la structure du modèle avec change-point. Alors il existe des vecteurs  $\beta$  et  $\tilde{\beta}$  de  $\mathbb{R}^d$  et des fonctions positives  $Y$  et  $\tilde{Y}$  tels que les processus  $\beta$  et  $Y$  introduits dans la proposition 4.5 vérifient

$$\begin{aligned}\beta_s &= \beta \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} + \tilde{\beta} \mathbf{1}_{\{s > \tau\}} \\ Y_s(x) &= Y(x) \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} + \tilde{Y}(x) \mathbf{1}_{\{s > \tau\}}.\end{aligned}$$

*Preuve* Soit  $Q$  une  $\mathbb{F}$ -mesure martingale équivalente quelconque. Par le théorème de Girsanov, les caractéristiques de  $X$  sous  $Q$  sont :

$$\begin{cases} b_s^Q = b + c\beta_s + \int_{\mathbb{R}^d} h(x)(Y_s(x) - 1)\nu(dx) \\ c^Q = c \\ \nu_s^Q(dx) = Y_s(x)\nu(dx) \end{cases}.$$

Or la loi de  $X_{\cdot \wedge \tau}$  coïncidera avec celle d'un processus de Lévy arrêté en  $\tau$  si et seulement si le triplet  $(b_s^Q, c_s^Q, \nu_s^Q)_{s \leq \tau}$  est déterministe et indépendant du temps. Ceci n'est possible que si il existe  $\beta$  et une fonction  $Y$ , indépendants de  $\tau$ , tels que pour tout  $s \leq \tau$ ,  $\beta_s = \beta$  et  $Y_s(x) = Y(x)$ . De même, pour que la loi de  $(X_s - X_{s \wedge \tau})_{s \geq \tau}$  soit celle d'un processus de Lévy, il doit exister  $\tilde{\beta}$  et  $\tilde{Y}$  tels que pour tout  $s > \tau$ ,  $\beta_s = \tilde{\beta}$  et  $Y_s = \tilde{Y}$ .  $\square$

On cherche maintenant à décrire cet ensemble en fonction des ensembles  $\mathcal{M}^L$  et  $\mathcal{M}^{\tilde{L}}$  de mesures martingales qui préservent la structure de Lévy pour  $e^L$  et  $e^{\tilde{L}}$  respectivement.

**Proposition 4.8** Une  $\mathbb{F}$ -mesure martingale équivalente  $Q$  préserve la structure de change-point si et seulement si

$$Z_t = c(\tau) \left[ \zeta_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + \zeta_\tau \frac{\tilde{\zeta}_t}{\tilde{\zeta}_\tau} \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} \right]$$

où  $c$  est une fonction mesurable telle que  $E[c(\tau)] = 1$ , et  $\zeta$  et  $\tilde{\zeta}$  sont les densités de deux mesures appartenant à  $\mathcal{M}^L$  et  $\mathcal{M}^{\tilde{L}}$  respectivement et qui préservent la propriété de Lévy.

*Preuve* Par la proposition 4.7, les densités des mesures martingales équivalentes qui préservent la structure de change-point sont de la forme

$$Z_t = c(\tau) \mathcal{E}(N_{\cdot \wedge \tau} + \tilde{N} - \tilde{N}_{\cdot \wedge \tau})_t$$

où

$$\begin{aligned} N_t &= \beta L_t^{(c)} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} (Y(x) - 1)(\mu^L - \nu(dx)ds) \\ \tilde{N}_t &= \tilde{\beta} \tilde{L}_t^{(c)} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d*}} (\tilde{Y}(x) - 1)(\mu^{\tilde{L}} - \tilde{\nu}(dx)ds). \end{aligned}$$

Comme  $X_{\cdot \wedge \tau}$  et  $X - X_{\cdot \wedge \tau}$  sont indépendants, ceci peut encore s'écrire

$$Z_t = c(\tau) \mathcal{E}(N)_{t \wedge \tau} \frac{\mathcal{E}(\tilde{N})_t}{\mathcal{E}(\tilde{N})_{t \wedge \tau}} = c(\tau) \zeta_{t \wedge \tau} \frac{\tilde{\zeta}_t}{\tilde{\zeta}_{t \wedge \tau}}$$

où, par le Théorème 1.18,  $\zeta$  et  $\tilde{\zeta}$  sont les densités de mesures appartenant à  $\mathcal{M}^L$  et  $\mathcal{M}^{\tilde{L}}$  respectivement et qui préservent la propriété de Lévy.  $\square$

On déduit finalement des résultats précédents la forme des mesures martingales équivalentes  $\hat{\mathbb{F}}$ -adaptées :

**Proposition 4.9** *Une mesure  $Q$  équivalente à  $P$  est une  $\hat{\mathbb{F}}$ -mesure martingale si et seulement si sa densité est de la forme*

$$\hat{Z}_t = E[Z_T | \hat{\mathcal{F}}_t] \quad (4.9)$$

où  $Z$  est la densité d'une  $\mathbb{F}$ -mesure martingale équivalente.

Une mesure  $Q$  équivalente à  $P$  est une  $\hat{\mathbb{F}}$ -mesure martingale équivalente qui préserve la structure de change-point si et seulement si sa densité est de la forme

$$\hat{Z}_t = E[c(\tau) | \hat{\mathcal{F}}_t] [\zeta_t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + \zeta_\tau \tilde{\zeta}_{t-\tau} \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}] \quad (4.10)$$

où  $\zeta$  et  $\tilde{\zeta}$  sont les densités de mesures appartenant à  $\mathcal{M}^L$  et  $\mathcal{M}^{\tilde{L}}$  respectivement, et qui préservent la propriété de Lévy.

*Preuve* L'égalité (4.9) découle de ce que  $\mathcal{F}_T = \hat{\mathcal{F}}_T$ . Pour les mesures qui préservent la structure de change-point, on déduit de la Proposition 4.8 que

$$\hat{Z}_t = c(\tau) \zeta_t E\left[\frac{\zeta_\tau}{\zeta_t} \tilde{\zeta}_{T-\tau} | \hat{\mathcal{F}}_t\right] \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + c(\tau) \zeta_\tau \tilde{\zeta}_{t-\tau} \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}.$$

Comme  $\zeta$  préserve la propriété de Lévy pour  $L$ ,  $\frac{\zeta_\tau}{\zeta_t}$  est indépendant de  $\hat{\mathcal{F}}_t$ . De plus,  $\tilde{\zeta}$  est aussi indépendant de  $L$  et donc de  $\hat{\mathcal{F}}_t$ . On a donc (4.10).  $\square$

### 4.3 Mesures martingales $f$ -minimales

On a montré dans la section précédente qu'un modèle de Lévy avec change-point admet une infinité de mesures martingales équivalentes. On cherche maintenant à minimiser une certaine  $f$ -divergence parmi l'ensemble de ces mesures. Conformément au cadre des chapitres précédents, on fait l'hypothèse suivante :

( $\mathcal{H}$ ) *On suppose que les deux modèles de Lévy associés à  $L$  et  $\tilde{L}$  admettent des mesures  $f$ -minimales parmi les éléments de  $\mathcal{M}^L$  et  $\mathcal{M}^{\tilde{L}}$  respectivement, qui préservent la propriété de Lévy et sont invariantes par changement d'échelle.*

L'invariance par changement d'échelle est ici relative à la filtration naturelle des processus de Lévy. Ainsi, on a pour le modèle associé à  $L$  : pour tout  $c > 0$  et tout  $t \geq 0$ ,

$$E[f(c \frac{dQ_t^*}{dP_t})] = \inf_{Q \in \mathcal{M}(L)} E[f(c \frac{dQ_t}{dP_t})]$$

et de même pour le modèle associé à  $\tilde{L}$ .

On va montrer que la mesure minimale, lorsqu'elle existe, s'écrit en fonction des mesures minimales associées aux deux modèles de Lévy initiaux. Avant d'énoncer le théorème principal, on introduit donc les notations suivantes :

On note  $\zeta^*$  et  $\tilde{\zeta}^*$  les densités respectives des mesures minimales associées respectivement à  $e^L$  et  $e^{\tilde{L}}$ . On définit alors pour tout  $t \leq T$  la variable aléatoire

$$z_T^*(t) = \zeta_t^* \frac{\tilde{\zeta}_T^*}{\tilde{\zeta}_t^*}.$$

Les densités qui préservent la propriété de Lévy pour  $e^{\tilde{L}_{\tau+} - \tilde{L}_{\tau}}$  sont de la forme  $\tilde{\zeta}_s^{\tau} = \frac{\tilde{\zeta}_{\tau+s}^*}{\tilde{\zeta}_{\tau}^*}$  où  $\tilde{\zeta}$  désigne la densité d'une mesure martingale pour  $e^{\tilde{L}}$  qui préserve la propriété de Lévy. Ainsi, on peut écrire de façon équivalente,

$$z_T^*(t) = \zeta_t^* \tilde{\zeta}_{T-t}^{*\tau}$$

où  $\tilde{\zeta}^{*\tau}$  est la densité de la mesure minimale associée à  $e^{\tilde{L}_{\tau+} - \tilde{L}_{\tau}}$ .

Si pour tout  $c > 0$  et tout  $t \leq T$ ,  $E[z_T^*(t)|f'(cz_T^*(t))]| < +\infty$ , on introduit la fonction

$$\lambda_t(c) = E[z_T^*(t)f'(cz_T^*(t))]$$

Comme  $f$  est convexe, pour tout  $t \leq T$ , la fonction  $\lambda_t$  est strictement croissante, et on note  $c_t : \lambda \mapsto c_t(\lambda)$  sa fonction inverse continue à droite. On a alors le théorème suivant :

**Théorème 4.10** *Soit  $f$  une fonction strictement convexe. On suppose que  $\mathcal{H}$  est vérifiée. Alors, s'il existe une  $\mathbb{F}$ -mesure martingale  $f$ -minimale  $\mathbb{Q}^*$  associée au modèle avec change-point, celle-ci préserve la structure de change-point et on a*

$$\frac{d\mathbb{Q}_T^*}{dP_T} = c(\tau)z_T^*(\tau) \quad (4.11)$$

où  $c$  est une fonction mesurable à valeurs positives telles que  $E[c(\tau)] = 1$ .

De plus, s'il existe un réel  $\lambda^*$  tel que

$$\int_0^T c_t(\lambda^*)d\alpha(t) = 1, \quad (4.12)$$

alors le modèle avec change-point admet une  $\mathbb{F}$ -mesure martingale  $f$ -minimale, dont la densité est donnée par (4.11) avec  $c(\tau) = c_{\tau}(\lambda^*)$ .

**Remarque.** On déduit de (4.11) que les paramètres de Girsanov associés au changement de mesure minimal sont

$$\beta_t = \beta \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + \tilde{\beta} \mathbf{1}_{\{t > \tau\}} \text{ et } Y_t = Y \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} + \tilde{Y} \mathbf{1}_{\{t > \tau\}}$$

où  $(\beta, Y)$  et  $(\tilde{\beta}, \tilde{Y})$  sont les paramètres de Girsanov des mesures de densité  $\zeta^*$  et  $\tilde{\zeta}^*$  respectivement. Ceci nous servira en particulier à déterminer des expressions de stratégies optimales.

Le reste de cette section est consacré à la preuve du Théorème 4.10, puis à l'étude du cas particulier des fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$  pour lequel il est possible d'obtenir une expression explicite de  $c^*$ .

### 4.3.1 Preuve du Théorème 4.10

La preuve se fait en deux temps. On montre d'abord que la mesure minimale, si elle existe, est nécessairement de la forme (4.11). En particulier, elle préserve la structure de change-point du modèle. On considère ensuite le problème de minimisation sur l'ensemble des fonctions mesurables positives vérifiant  $E[c(\tau)] = 1$ .

**Lemme 4.11** *Sous l'hypothèse (H), s'il existe une  $\mathbb{F}$ -mesure minimale pour le modèle avec change-point, sa densité est nécessairement de la forme (4.11). En particulier, elle préserve la structure de change-point du modèle.*

*Preuve* On rappelle que par le Théorème 4.5, la densité des  $\mathbb{F}$ -mesures martingales pour le modèle avec change-point vérifient  $Z_T = c(\tau)\zeta_\tau\tilde{\zeta}_{T-\tau}$ , où

$$\zeta_\tau = \zeta_\tau(\tau, (L_u)_{u \leq \tau}) \text{ et } \tilde{\zeta}_{T-\tau} = \tilde{\zeta}_{T-\tau}(\tau, (L_u)_{u \leq \tau}, (\tilde{L}_u - \tilde{L}_\tau)_{\tau \leq u \leq T}).$$

On suppose qu'il existe une mesure minimale  $\mathbb{Q}^*$ . On note  $Z$  la densité d'une mesure martingale équivalente quelconque qui vérifie  $E[|f(Z_T)|] < +\infty$ . Comme  $\tau$  est indépendant des processus  $L$  et  $\tilde{L}$ ,

$$E[f(Z_T)] = \int_0^T E[f(c(t)\zeta_t\tilde{\zeta}_{T-t})]\alpha(dt). \quad (4.13)$$

Comme la mesure minimale est invariante par changement d'échelle, on s'intéresse, pour  $t$  fixé, à la minimisation de  $E[f(\zeta_t, \tilde{\zeta}_{T-t})]$ . En conditionnant par rapport à  $\mathcal{F}_t$ , on a alors

$$E[f(\zeta_t\tilde{\zeta}_{T-t})|\mathcal{F}_t] = E[f(\zeta_t(t, y)\tilde{\zeta}_t(t, y, (\tilde{L}_u - \tilde{L}_t)_{t \leq u \leq T}))]|_{y=(L_u)_{u \leq t}}.$$

Or, à  $t$  et  $y$  fixé,  $\tilde{\zeta}_{T-t}(t, y, (\tilde{L}_u - \tilde{L}_t)_{t \leq u \leq T})$  a la même loi que la densité d'une mesure martingale relativement à la filtration naturelle pour le processus  $\tilde{L}$ . Ainsi, comme  $f$  préserve la propriété de Lévy et est invariante par changement d'échelle,

$$E[f(\zeta_t(t, y)\tilde{\zeta}_t(t, y, \tilde{L}))] \geq E[f(\zeta_t(t, y)\tilde{\zeta}_{T-t}^*)].$$

Ainsi,

$$E[f(\zeta_t\tilde{\zeta}_{T-t})] \geq E[f(\zeta_t\tilde{\zeta}_{T-t}^*)].$$

On conditionne alors par rapport à  $\sigma(\tilde{L}_u - \tilde{L}_t, u \geq t)$  :

$$E[f(\zeta_t\tilde{\zeta}_{T-t}^*)] = E[f(\zeta_t(t, L)\tilde{\zeta}_t^*(\tilde{y}))]|_{\tilde{y}=\tilde{L}}.$$

Comme précédemment, à  $t$  fixé,  $\zeta_t(t, L)$  a même loi que la densité d'une mesure martingale relativement à la filtration engendrée par le processus  $L$ . Par préservation de la propriété de Lévy et invariance par changement d'échelle,

$$E[f(\zeta_t(t, y)\tilde{\zeta}_{T-t}^*)] \geq E[f(\zeta_t^*\tilde{\zeta}_{T-t}^*)].$$

Finalement, en utilisant à nouveau l'invariance par changement d'échelle, on déduit de cette dernière égalité et de (4.13) que pour toute fonction mesurable positive  $c$ ,

$$E[f(c(\tau)\zeta_\tau\tilde{\zeta}_{T-\tau})] \geq E[f(c(\tau)\zeta_\tau^*\tilde{\zeta}_{T-\tau}^*)].$$

Ainsi, la mesure minimale est nécessairement de la forme (4.11). En particulier, par la Proposition 4.8,  $\mathbb{Q}^*$  préserve la structure de change-point.  $\square$

**Lemme 4.12** *On suppose que  $(\mathcal{H})$  est vérifiée et qu'il existe  $\lambda^* > 0$  tel que  $\int_0^T c_t(\lambda^*)d\alpha(t) = 1$ . Alors le modèle avec change-point admet une mesure  $f$ -minimale sur  $[0, T]$  associée à la fonction  $c(\tau) = c_\tau(\lambda^*)$ .*

*Preuve* On doit montrer que  $c^*(t) = c_t(\lambda^*)$  donne une  $f$ -divergence minimale parmi toutes les fonctions mesurables positives vérifiant  $E[c(\tau)] = 1$ . Soit donc  $c$  une telle fonction. Comme  $f$  est strictement convexe, on a pour tout  $t \leq T$ ,

$$f(c(t)z_T^*(t)) \geq f(c^*(t)z_T^*(t)) + z_T^*(t)f'(c^*(t)z_T^*(t))(c(t) - c^*(t)).$$

En prenant l'espérance,

$$E[f(c(t)z_T^*(t))] \geq E[f(c^*(t)z_T^*(t))] + \lambda(c(t) - c^*(t))$$

et finalement en intégrant par rapport à la mesure  $\alpha$ ,

$$E[f(c(\tau)z_T^*(\tau))] \geq E[f(c^*(\tau)z_T^*(\tau))]. \quad \square$$

Les Lemmes 4.11 et 4.12 donnent alors les deux parties du Théorème 4.10.

### 4.3.2 Le cas $f''(x) = ax^\gamma$

On s'intéresse maintenant au problème de minimisation pour les fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$ . Nous avons vu dans le chapitre précédent que dans ce cas, les mesures minimales associées aux deux modèles de Lévy initiaux préservent la propriété de Lévy et sont invariantes par changement d'échelle. Ainsi, les conditions d'application du Théorème 4.10 sont vérifiées. On montre qu'on peut ici obtenir une expression relativement explicite de  $c^*$ .

**Proposition 4.13** *On suppose que  $f''(x) = ax^\gamma$  et que les deux modèles de Lévy exponentiels admettent une mesure  $f$ -minimale. Alors il existe une mesure  $f$ -minimale pour le modèle avec change-point qui préserve la structure de change-point. Sa densité s'écrit*

$$Z_T^* = c^*(\tau)\zeta_\tau^*\tilde{\zeta}_{T-\tau}^*. \quad (4.14)$$

Si  $\gamma \neq -1$ ,

$$c^*(t) = \frac{E[z_T^*(t)^{\gamma+2}]^{-\frac{1}{\gamma+1}}}{\int_0^T E[z_T^*(t)^{\gamma+2}]^{-\frac{1}{\gamma+1}} d\alpha(t)} \quad (4.15)$$

Si  $\gamma = -1$ ,

$$c^*(t) = \frac{e^{-E[z_T^*(t) \ln(z_T^*(t))]}{\int_0^T e^{-E[z_T^*(t) \ln(z_T^*(t))]} d\alpha(t)} \quad (4.16)$$

On a en particulier  $c^*(t) = 1$  si et seulement si  $\gamma = -2$  ce qui correspond au cas d'une  $f$ -divergence logarithmique :  $f(x) = -a \ln(x) + bx + c$ .



*Preuve* On considère les fonctions  $c^*$  définie en (4.15) ou (4.16) et on montre qu'elles vérifient les conditions d'applications du Théorème 4.10. Il découle de la définition de ces fonctions que  $\int_0^T c^*(t) d\alpha(t) = 1$  et il nous faut donc vérifier qu'il existe  $\lambda^* > 0$  tel que pour tout  $t \leq T$ ,  $c^*(t) = c_t(\lambda^*)$ . Notons que si  $\gamma \neq -1$ , il existe une constante  $m$  telle que  $f'(x) = ax^{\gamma+1} + m$ . On a donc

$$\begin{aligned} E[z_s^*(t) f'(c^*(t) z_s^*(t))] &= ac^*(t)^{\gamma+1} E[z_s^*(t)^{\gamma+2}] + m \\ &= f' \left( \frac{1}{\int_0^T E[z_T^*(t)^{\gamma+2}]^{-\frac{1}{\gamma+1}} d\alpha(t)} \right) = \lambda^* \end{aligned}$$

De même, si  $\gamma = -1$ , il existe une constante  $m$  telle que  $f'(x) = a \ln(x) + m$ . On a alors

$$\begin{aligned} E[z_T^*(t) f'(c^*(t) z_T^*(t))] &= a \ln(c^*(t)) + a E[z_T^*(t) \ln(z_T^*(t))] + m \\ &= f' \left( \frac{1}{\int_0^T e^{-E[z_T^*(t) \ln(z_T^*(t))]} d\alpha(t)} \right) = \lambda^* \end{aligned}$$

Ainsi, dans les deux cas, on déduit du Théorème 4.10 l'existence d'une mesure minimale dont la densité est donnée par (4.14).  $\square$

**Exemple : Modèle de Black-Scholes avec change-point.** On suppose que  $L$  et  $\tilde{L}$  sont des processus de Lévy continus de caractéristiques respectives  $(b, c, 0)$  et  $(\tilde{b}, \tilde{c}, 0)$ . Il est bien connu que les deux modèles initiaux sont complets, avec une unique mesure martingale équivalente, qui définit un unique prix pour une option. Cependant, dans le modèle avec change-point, il existe une infinité de mesures martingales équivalentes en bijection avec l'ensemble des fonctions mesurables  $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{+,*}$  telles que  $E[c(\tau)] = 1$ . Leurs densités sont de la forme

$$\frac{dQ_T}{dP_T} = c(\tau) \exp \left( - \int_0^t \left( \frac{b_s}{c_s} + \frac{1}{2} \right) dX_s^c - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{b_s}{c_s} + \frac{1}{2} \right)^2 c_s ds \right)$$

où

$$b_s = b \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} + \tilde{b} \mathbf{1}_{\{s > \tau\}} \text{ et } c_s = c \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} + \tilde{c} \mathbf{1}_{\{s > \tau\}}.$$

Si maintenant on considère une fonction  $f$  telle que  $f''(x) = ax^\gamma$ , la Proposition 4.13 permet de calculer une expression explicite de la fonction  $c$  associée à la mesure  $f$ -minimale. On obtient pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,

$$c_\gamma^*(t) = \frac{e^{-\Psi_\gamma t}}{\int_0^T e^{-\Psi_\gamma t} d\alpha(t)}$$

où

$$\Psi_\gamma = \frac{\gamma+2}{2} \left( c \left( \frac{b}{c} + \frac{1}{2} \right)^2 - \tilde{c} \left( \frac{\tilde{b}}{\tilde{c}} + \frac{1}{2} \right)^2 \right).$$

Si on suppose par exemple que  $\tau$  suit une loi exponentielle de paramètre  $q$  tronquée en  $T$ , on obtient

$$c_\gamma^*(t) = \frac{(q + \Psi_\gamma) e^{-\Psi_\gamma t}}{q + \Psi_\gamma e^{-(\Psi_\gamma + q)T}}.$$

#### 4.4 Stratégies optimales

Comme dans le cadre des modèles de Lévy exponentiels, les modèles avec change-point sont généralement incomplets. Notons toutefois que pour un modèle de Black-Scholes avec change-point, il existe par le théorème de représentation des martingales, pour toute variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable  $H$  intégrable par rapport à une mesure martingale équivalente  $Q$ , une variable aléatoire  $\tau$ -mesurable  $H_0$  et un processus prévisible  $\phi$  tels que

$$H = H_0 + \int_0^T \phi_s dS_s,$$

où  $\int_0^\cdot \phi_s dS_s$  définit une  $Q$ -martingale. Ceci implique en particulier qu'un tel marché est complet, bien que comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, il existe une infinité de mesures martingales équivalentes. Cependant, relativement à la filtration  $\hat{\mathbb{F}}$ , le marché est incomplet : la variable aléatoire  $\tau$  par exemple, ne peut pas être atteinte par une stratégie admissible. Plus généralement, le marché sera bien sûr incomplet dès qu'un des deux marchés associés à  $L$  ou  $\tilde{L}$  est incomplet.

On s'intéresse donc, comme pour les modèles de Lévy, aux stratégies optimales associées à des problèmes de maximisation d'utilité. On note  $u$  une fonction d'utilité et  $f_u$  sa fonction convexe conjuguée. Comme précédemment, on obtient sous certaines conditions d'intégrabilité l'expression de stratégies optimales à partir de la densité de mesures martingales  $f_u$ -minimales. S'il existe une mesure  $f_u$ -minimale parmi les éléments de  $\mathcal{M}^{\mathbb{F}}$ , on note  $(Z_t^*)_{t \leq T}$  sa densité par rapport à  $P$  et  $\beta$  son premier paramètre de Girsanov. Comme dans le cadre des modèles de Lévy, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{K} = \{Q \in \mathcal{M}^{\mathbb{F}}, f(Q||P) < +\infty, E_Q[|f'(\frac{dQ}{dP})|] < +\infty\}$$

On rappelle également le résultat de Goll, Rüschendorf,[34], Th 3.1 :

**Théorème 4.14 (cf [34],Th3.1)** *Soit  $Q^* \in \mathcal{K}$ . Alors, si  $Q^*$  est une mesure  $f$ -minimale sur  $[0, T]$ ,*

$$f'\left(\frac{dQ_T^*}{dP_T}\right) = x + (\phi \cdot S)_T Q^* - p.s \quad (4.17)$$

où  $x \in \mathbb{R}$  et  $\phi$  est un processus prévisible tel que  $\phi \cdot S$  est une martingale sous  $Q^*$ .

Notons que ce résultat est vrai même lorsque la tribu  $\mathcal{F}_0$  n'est pas triviale. En effet, la preuve repose sur la caractérisation suivante de l'ensemble  $\mathcal{M}^{ac}$  des mesures martingales absolument continues par rapport à  $P$ . On introduit l'ensemble

$$G = \{(\phi \cdot S)_T, \phi^{(i)} = H^{(i)} \mathbf{1}_{[s_i, t_i]}, s_i < t_i, H^{(i)} \text{ bornée } \mathcal{F}_{s_i} - \text{mesurable} \} \\ \bigcup \{\mathbf{1}_B, P(B) = 0\}$$

ainsi que l'espace vectoriel  $F = Vect(1, G)$ . Soit  $Q_0$  une mesure martingale équivalente choisie arbitrairement. On a alors la caractérisation suivante :

$$\mathcal{M}^{ac} = \{Q \ll P, \forall \xi \in F, E_Q[\xi] = E_{Q_0}[\xi]\} \quad (4.18)$$

et cette description de  $\mathcal{M}^{ac}$  est valable indépendamment de la forme de la tribu  $\mathcal{F}_0$ . Il pourrait sembler naturel que la constante  $x$  soit plus généralement une variable

aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable. Mais on peut remarquer qu'un tel résultat est obtenu lorsque l'espace vectoriel  $F$  est remplacé par  $F_1 = Vect(\{\mathbf{1}_A, A \in \mathcal{F}_0\}, G)$ . Ceci est équivalent à imposer que les mesures  $Q$  et  $P$  coïncident sur la tribu  $\mathcal{F}_0$ , ce que nous n'avons pas fait dans ce travail.

On s'intéresse maintenant à la détermination de stratégies optimales et on commence par montrer qu'il suffit de considérer le cas des stratégies optimales relativement à la filtration élargie :

**Proposition 4.15** *On suppose qu'il existe une mesure minimale  $\mathbb{Q}^*$  pour le modèle avec change-point qui appartient à  $\mathcal{K}$  et qui minimise  $E_P[f(\delta \frac{dQ_T}{dP_T})]$  sur  $\mathcal{M}$  pour tout  $\delta > 0$ . Il existe alors une stratégie  $\hat{\phi}$  (asymptotiquement)  $u$ -optimale parmi les stratégies  $\mathbb{F}$ -adaptées. De plus,  $\hat{\phi}$  est nécessairement  $\hat{\mathbb{F}}$ -adaptée.*

**Remarque.** On ne parle pas ici d'invariance par changement d'échelle pour la mesure  $\mathbb{Q}^*$  car on ne fait pas d'hypothèse sur l'invariance par changement de temps. Cette notion serait plus délicate à définir dans le cadre des modèles avec change-point puisque le temps  $\tau$  est à valeurs dans l'intervalle  $[0, T]$  fixé à l'avance.

*Preuve* On suppose qu'il existe une mesure minimale  $\mathbb{Q}^*$  qui appartient à  $\mathcal{K}$ . On rappelle qu'on a noté que la preuve du Théorème 3.24 n'est pas spécifique aux processus de Lévy mais est valable pour tous les modèles de semimartingales. En particulier, elle est encore valable dans le modèle avec change-point. Ainsi, il existe  $\delta$  et  $\hat{\phi}$  tels que

$$f'(\delta Z_T^*) = x + \int_0^T \hat{\phi}_s dS_s$$

où  $(\int_0^\cdot \hat{\phi}_s dS_s)$  définit une  $\mathbb{Q}^*$ -martingale et  $\hat{\phi}$  est une stratégie optimale  $\mathbb{F}$ -adaptée. Or, comme  $\mathcal{F}_T = \hat{\mathcal{F}}_T$ ,  $Z_T^*$  est aussi la valeur finale de la densité de la mesure minimale parmi les mesures martingales relatives à  $\hat{\mathbb{F}}$ . Il existe donc une stratégie  $\tilde{\phi}$  optimale parmi les stratégies  $\hat{\mathbb{F}}$ -adaptées et telle que

$$f'(\delta Z_T^*) = x + \int_0^T \tilde{\phi}_s dS_s$$

On a alors

$$E[u(x + \int_0^T \hat{\phi}_s dS_s)] = E[u(x + \int_0^T \tilde{\phi}_s dS_s)] = \sup_{\phi \in \mathcal{A}^{\hat{\mathbb{F}}}} E[u(x + \int_0^T \phi_s dS_s)]$$

de sorte que  $\tilde{\phi}$  est  $\mathbb{F}$ -optimale. Par stricte concavité de  $u$ , il existe au plus une stratégie  $u$ -optimale et donc  $\tilde{\phi} = \hat{\phi}$ .  $\square$

Ainsi, il nous suffit de déterminer la stratégie optimale  $\mathbb{F}$ -adaptée. Pour cela, comme dans le cadre des modèles de Lévy exponentiels, on explicite le processus  $\hat{\phi}$  qui apparaît dans la décomposition

$$f'(\delta Z_T^*) = x + \int_0^T \hat{\phi}_s dS_s$$

associée à la mesure minimale. On s'intéresse plus particulièrement aux fonctions d'utilité dont la fonction convexe conjuguée vérifie  $f''(x) = ax^\gamma$ . Avant d'énoncer le

théorème, on introduit la notation

$$Z_{s,T}(t) = \frac{Z_T(t)}{Z_s(t)}$$

où  $Z$  désigne la densité d'une mesure martingale qui préserve la structure de change-point.

**Théorème 4.16** *Soit  $u$  une fonction d'utilité telle que sa fonction convexe conjuguée  $f$  vérifie  $f''(x) = ax^\gamma$ , avec  $a > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  et soit  $x > \underline{x}$  un investissement initial. On suppose que les modèles de Lévy exponentiels associés à  $L$  et  $\tilde{L}$  admettent une mesure  $f$ -minimale. Alors le modèle avec change-point admet une stratégie (asymptotiquement)  $u$ -optimale  $\hat{\phi}$  et presque sûrement, pour tout  $i \leq d$ ,*

$$\hat{\phi}_s^{(i)} = \alpha_{\gamma+1} \frac{\beta_s^{(i)}}{S_{s-}^{(i)}} \frac{z_{s-}^{*\gamma+1}}{E_{Q^*}[z_s^{*\gamma+1}]} \quad (4.19)$$

où  $\alpha_{\gamma+1} = (\gamma + 1)(x + f'(1)) - a$ .

**Remarque 1.** L'expression explicite (4.19) permet de voir que  $\hat{\phi}$  est bien  $\hat{\mathbb{F}}$ -adaptée : la dépendance en  $\tau$  ne se fait qu'à travers la filtration  $(\sigma(\mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}}))_{s \geq 0}$ .

**Remarque 2.** En comparant ce résultat avec le Théorème 3.24 du chapitre précédent, on voit que lorsque  $f''(x) = ax^\gamma$ , la stratégie optimale associée au modèle avec change-point s'écrit en fonction des stratégies optimales pour les deux modèles de Lévy  $e^L$  et  $e^{\tilde{L}}$ . On a en effet,

$$\hat{\phi}_s^{(i)} = \hat{\phi}_s^{L(i)} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} + \frac{\zeta_{\tau-}^{*\gamma+1}}{S_{\tau-} E_{Q^*}[\zeta_\tau^{*\gamma+1}]} \hat{\phi}_{s-\tau}^{\tilde{L}(i)} \mathbf{1}_{\{s > \tau\}}$$

où  $\hat{\phi}^L$  et  $\hat{\phi}^{\tilde{L}}$  sont les stratégies  $u$ -optimales pour les modèles  $e^L$  et  $e^{\tilde{L}}$  respectivement.

*Preuve* Comme les conditions de la Proposition 4.13 sont vérifiées, il existe une mesure  $f$ -minimale  $Q^*$  de densité  $Z^*$  qui est invariante par changement d'échelle. On note  $\delta$  l'unique réel strictement positif tel que  $-E_{Q^*}[f'(\delta Z_T^*)] = x$ . On a alors

$$-f'(\delta Z_T^*) = x + (\hat{\phi} \cdot S)_T \quad (4.20)$$

et  $\hat{\phi}$  définit la stratégie optimale qui est par la Proposition 4.15 nécessairement  $\hat{\mathbb{F}}$ -adaptée. On cherche maintenant à obtenir une expression plus explicite de  $\hat{\phi}$ . Pour cela, on commence par donner une décomposition analogue à celle de Lemme 3.15 pour  $E_{Q^*}[f'(\delta Z_T^*)|\mathcal{F}_s]$ . On commence par noter que

$$E_{Q^*}[f'(\delta Z_T^*)|\mathcal{F}_s] = E_{Q^*}[f'(\delta x Z_{s,T}^*(t))]|_{x=Z_s^*(\tau), t=\tau}.$$

On note alors  $\rho_t(s, x) = E_{Q^*}[f'(\delta x Z_{s,T}^*(t))]$ . On rappelle que  $f''(x) = ax^\gamma$ , de sorte que

$$\rho_t(s, x) = \begin{cases} a \ln(x) + a E_{Q^*}[\ln Z_{s,T}^*(t)] + f'(1) & \text{si } \gamma = -1 \\ \frac{a}{\gamma+1} (x^{\gamma+1} E_{Q^*}[(Z_{s,T}^*(t))^{\gamma+1}] - 1) + f'(1) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.21)$$

De plus, on a

$$E_{Q^*}[\ln(Z_{s,T}^*(t))] = - \int_s^T \left[ \frac{\beta_u^\top c_u \beta_u}{2} + \int_{\mathbb{R}^{d*}} (Y_u(x) \ln(Y_u(x) - (Y_u(x) - 1)) \nu(dx) \right] du$$

et pour tout  $\gamma \neq -1$ ,

$$\begin{aligned} E_{Q^*}[Z_{s,T}^*(t)^{\gamma+1}] &= E_P[Z_{s,T}^*(t)^{\gamma+2}] = \exp\left(\int_s^T \frac{(\gamma+2)(\gamma+1)}{2} \top \beta_u c_u \beta_u \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^{d*}} (Y_u^{\gamma+2}(x) - 1 - (\gamma+2)(Y_u(x) - 1)) \nu(dx) du\right) \end{aligned}$$

On rappelle également que

$$\beta_u = \beta \mathbf{1}_{\{u \leq \tau\}} + \tilde{\beta} \mathbf{1}_{\{u > \tau\}} \text{ et } Y_u(x) = Y(x) \mathbf{1}_{\{u \leq \tau\}} + \tilde{Y}(x) \mathbf{1}_{\{u > \tau\}}$$

où les couples  $(\beta, Y)$  et  $(\tilde{\beta}, \tilde{Y})$  sont les paramètres de Girsanov des mesures minimales pour les deux modèles de Lévy initiaux. Ainsi, on peut déduire de (4.21) que la fonction  $\rho_t$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que  $\frac{\partial}{\partial x} \rho_t(s, x) = a(\delta x)^{\gamma+1} E_{Q^*}[Z_{s,T}^*(t)^{\gamma+1}]$ . En appliquant alors la formule d'Itô, on obtient presque sûrement, pour tout  $s \leq T$ ,

$$\rho_t(s, Z_s^*) = E_{Q^*}[f'(\delta Z_T^*(t))] + \delta^{\gamma+1} \sum_{i=1}^d \int_0^s Z_u^*(t)^{\gamma+1} E_{Q^*}[Z_{u,T}^*(t)^{\gamma+1}] \frac{\beta_u^{(i)}}{S_{u-}^{(i)}} dS_u^{(i)}.$$

Or, pour tout  $t \leq T$ ,  $-E_{Q^*}[f'(\delta Z_T^*(t))] = x$ . On a alors, en prenant  $s = T$ ,

$$-f'(\delta Z_T^*) = x - a\delta^{\gamma+1} \sum_{i=1}^d \int_0^T Z_{u-}^{*\gamma+1} E_{Q^*}[Z_{u,T}^*(t)^{\gamma+1}] \Big|_{t=\tau} \frac{\beta_u^{(i)}}{S_{u-}^{(i)}} dS_u^{(i)}.$$

En identifiant cette décomposition avec (4.20), on en déduit que pour tout  $i \leq d$ ,

$$\hat{\phi}_s^{(i)} = -a\delta^{\gamma+1} Z_{s-}^{*\gamma+1} E_{Q^*}[Z_{s,T}^*(t)^{\gamma+1}] \Big|_{t=\tau} \frac{\beta_s^{(i)}}{S_{s-}^{(i)}}.$$

On rappelle que par la Proposition 4.13,  $Z_T^* = c_\tau z_T^*(\tau)$  où  $c_\tau$  est défini en (4.15) et (4.16) et  $z_s^*(t) = \zeta_{s \wedge t}^* \tilde{\zeta}_{s-t \wedge s}^*$ . La stratégie optimale s'écrit donc

$$\hat{\phi}_s^{(i)} = -a\delta^{\gamma+1} c_\tau^{\gamma+1} z_{s-}^*(\tau)^{\gamma+1} E_{Q^*}[z_{s,T}^*(t)^{\gamma+1}] \Big|_{t=\tau} \frac{\beta_s^{(i)}}{S_{s-}^{(i)}}. \quad (4.22)$$

En particulier, si  $\gamma = -1$ , on a

$$\hat{\phi}_s^{(i)} = -a \frac{\beta_s^{(i)}}{S_{s-}^{(i)}}.$$

On cherche maintenant à obtenir une écriture plus simple lorsque  $\gamma \neq -1$ . Comme  $\zeta^*$  et  $\tilde{\zeta}^*$  sont les densités de mesures qui préservent la propriété de Lévy, pour tout  $t \leq T$ , les variables aléatoires  $z_s^*(t)$  et  $z_{s,T}^*(t)$  sont indépendantes et donc

$$E_{Q^*}[z_T^*(t)^{\gamma+1}] = E_{Q^*}[z_s^*(t)^{\gamma+1}] E_{Q^*}[z_{s,T}^*(t)^{\gamma+1}]. \quad (4.23)$$

Comme  $\gamma \neq -1$ , on a pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{a}{\gamma+1}(f'(x) - 1) + f'(1)$ . Ainsi, pour tout  $t \leq T$ ,

$$-x = E_{Q^*}[f'(\delta c_t z_T^*(t))] = a((\delta c_t)^{\gamma+1} E_{Q^*}[z_T^*(t)^{\gamma+1}] - 1) + f'(1)$$

et donc

$$(\delta_t c_t)^{\gamma+1} E_Q^* [z_T^*(t)^{\gamma+1}] = 1 - \frac{\gamma+1}{a} (x + f'(1))$$

En insérant cette égalité dans (4.22) et en utilisant (4.23), on obtient finalement

$$\hat{\phi}_s^{(i)} = ((\gamma+1)(x + f'(1)) - a) \frac{z_{s-}^{*\gamma+1}}{E_{Q^*}[z_{s-}^{*\gamma+1}]} \frac{\beta_{s-}^{(i)}}{S_{s-}^{(i)}} \square$$

On obtient finalement des expressions explicites de ces stratégies optimales pour le modèle de Black-Scholes.

**Modèle de Black-Scholes avec change-point** On suppose que  $L$  et  $\tilde{L}$  sont des processus de Lévy de caractéristiques  $(b, c, 0)$  et  $(\tilde{b}, \tilde{c}, 0)$  respectivement. On rappelle que l'expression de la densité de la mesure minimale pour les fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$  a été donnée dans la section 4.3.2. On note

$$\beta_s = -(\frac{b}{c} + \frac{1}{2}) \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} - (\frac{\tilde{b}}{\tilde{c}} + \frac{1}{2}) \mathbf{1}_{\{s > \tau\}}.$$

Dans le cas de la maximisation d'une utilité exponentielle,  $u(x) = 1 - e^{-x}$ , on a  $f''(x) = \frac{1}{x}$  et la stratégie optimale est donc donnée par

$$\hat{\phi}_s = -\frac{\beta_s}{S_s}.$$

En particulier, tout comme pour un modèle de Lévy simple, l'investissement initial n'intervient pas dans l'expression de la stratégie optimale.

Pour une utilité logarithmique,  $u(x) = \ln(x)$ , et un investissement initial  $x_0$ , on a  $f''(x) = \frac{1}{x^2}$  et donc

$$\hat{\phi}_s = -\frac{x_0 \beta_s}{S_s z_s^*}.$$

On peut alors réécrire cette expression uniquement en fonction des paramètres du modèle et du prix de l'actif :

$$\hat{\phi}_s = \frac{(\frac{b_s}{c_s} + \frac{1}{2}) x_0 \exp(\int_0^s \frac{c_u}{4} - \frac{b_u^2}{2c_u} du)}{S_{s \wedge \tau}^{\beta+1} (\frac{S_s}{S_{s \wedge \tau}})^{\tilde{\beta}+1}}.$$

Pour une utilité puissance,  $u(x) = \frac{x^p}{p}$ ,  $p < 1$ , on a  $f''(x) = \frac{1}{1-p} x^{\frac{2-p}{p-1}}$ , et

$$\hat{\phi}_s = -\frac{x_0 \beta_s}{(1-p) S_s} \frac{z_s^{*\frac{1}{p-1}}}{E[z_s^{*\frac{2-p}{p-1}}]}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\hat{\phi}_s = -x_0 (\frac{b_s}{c_s} + \frac{1}{2}) \exp\left(-\frac{1}{2(p-1)^2} \int_0^t \beta_s^2 c_s + 2b_s \beta_s (p-1) ds\right) S_{s \wedge \tau}^{\frac{\beta}{p-1}-1} (\frac{S_s}{S_{s \wedge \tau}})^{\frac{\tilde{\beta}}{p-1}-1}.$$

## 4.5 Prix d'options dans un modèle avec change-point

On s'intéresse finalement à la détermination d'expressions pour les prix d'options dans les modèles avec change-point. On considère un modèle de Lévy avec change-point unidimensionnel et une option dont la fonction de payoff  $g$  ne dépend que de la valeur finale :  $g(S) = g(S_T)$ . Etant donné une mesure martingale  $Q$ , on peut alors obtenir une expression intégrale de  $E_Q[g(S_T)]$  en appliquant les résultats utilisant la transformation de Fourier mentionnés au Chapitre 1. On s'intéresse plus spécialement aux mesures martingales qui préservent la structure de change-point. On rappelle que la densité d'une telle mesure  $Q$  est de la forme

$$Z_T = c(\tau) \zeta_\tau \frac{\tilde{\zeta}_T}{\tilde{\zeta}_\tau}$$

où  $\zeta$  et  $\tilde{\zeta}$  sont les densités de mesures martingales pour  $e^L$  et  $e^{\tilde{L}}$  respectivement, qui préservent la propriété de Lévy. On note alors  $\psi_Q$  la fonction cumulant de  $L$  sous  $Q$  : pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $E_Q[e^{zX_1}] < +\infty$ , on a

$$\psi_Q(z) = (b + c\beta)z + \frac{c}{2}z^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{zx} - 1 - zh(x))\nu(dx).$$

On note également  $\tilde{\psi}_Q$  la fonction cumulant de  $\tilde{L}$  sous  $Q$  :

$$\tilde{\psi}_Q(z) = (\tilde{b} + \tilde{c}\tilde{\beta})z + \frac{\tilde{c}}{2}z^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{zx} - 1 - zh(x))\tilde{\nu}(dx)$$

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 4.17** *On considère un modèle de Lévy avec change-point unidimensionnel  $S = S_0 e^X$  et une option dont la fonction de payoff  $g$  ne dépend que de la valeur finale du prix. Soit  $Q$  une mesure martingale équivalente qui préserve la structure de change-point. On suppose qu'il existe deux intervalles  $I_1$  et  $I_2$  de  $\mathbb{R}$  tels que :*

- i) *Pour tout  $R \in I_1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} e^{-Rx} g(x) dx < +\infty$ .*
- ii) *Pour tout  $z \in I_2$ ,  $E_Q[e^{zL_T}] < +\infty$  et  $E_Q[e^{z\tilde{L}_T}] < +\infty$ .*
- iii)  *$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ .*

*Alors, pour tout  $R \in I_1 \cap I_2$ ,*

$$E_Q[g(X_T)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} c(t) e^{t\psi_Q(iu-R) + (T-t)\tilde{\psi}_Q(iu-R)} \mathcal{F}_g(u + iR) du d\alpha(t) \quad (4.24)$$

où  $\mathcal{F}_g(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} g(x) dx$ .

*Preuve* Il s'agit d'une application directe du Théorème 1.23. En effet, d'après ce résultat,

$$E_Q[g(X_T)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} E_Q[e^{(R-iu)X_T}] \mathcal{F}_g(u + iR) du. \quad (4.25)$$

Comme  $\tau$  est indépendant de  $L$  et  $\tilde{L}$  et comme  $L$  et  $\tilde{L}$  sont indépendants, on a

$$\begin{aligned} E_Q[e^{(R-iu)X_T}] &= \int_0^T c(t) E_Q[e^{(R-iu)(L_t + \tilde{L}_T - \tilde{L}_t)}] d\alpha(t) \\ &= \int_0^T c(t) E_Q[e^{(R-iu)L_t}] E_Q[e^{(R-iu)\tilde{L}_{T-t}}] d\alpha(t) \end{aligned}$$

On obtient alors (4.24) en insérant cette expression dans (4.25).  $\square$

On étudie finalement plus en détail le cas du modèle de Black-Scholes. On introduit pour cela la notation  $\sigma(t) = ct + \tilde{c}(T - t)$ .

**Proposition 4.18** *On considère un actif risqué  $S$  donné par un modèle de Black-Scholes avec change-point et une option dont le payoff est de la forme  $g(X_T)$ . Alors, les prix admissibles sont de la forme*

$$E_Q[g(X_T)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{c(t)}{\sqrt{\sigma(t)}} g(x) e^{-\frac{(x+\sigma(t))^2}{2\sigma(t)}} dx d\alpha(t) \quad (4.26)$$

où  $c$  est une fonction borélienne positive telle que  $E[c(\tau)] = 1$ .

*Preuve* On rappelle que la densité des mesures martingales équivalentes sont de la forme

$$Z_T = c(\tau) \exp \left( - \int_0^t \left( \frac{b_s}{c_s} + \frac{1}{2} \right) dX_s^c - \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{b_s}{c_s} + \frac{1}{2} \right)^2 c_s ds \right)$$

où  $c$  est une fonction borélienne positive telle que  $E[c(\tau)] = 1$ . Comme  $\tau$  est indépendant de  $L$  et  $\tilde{L}$ , on a

$$E_Q[g(X_T)] = \int_0^T E_Q[g(L_t + \tilde{L}_T - \tilde{L}_t)] d\alpha(t).$$

Or, sous  $Q$ ,  $L_t$  et  $\tilde{L}_T - \tilde{L}_t$  sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives  $\mathcal{N}(-\frac{ct}{2}, ct)$  et  $\mathcal{N}(-\frac{\tilde{c}(T-t)}{2}, \tilde{c}(T-t))$ . Ainsi,  $X_T$  a pour loi  $\mathcal{N}(-\frac{\sigma(t)}{2}, \sigma(t))$  et on en déduit (4.26).  $\square$

On peut alors comparer les valeurs des prix d'options associés à différentes mesures  $f$ -minimales où  $f$  vérifie  $f''(x) = ax^\gamma$ ,  $a > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . On considère pour cela une option d'achat européenne de payoff  $g(x) = (e^x - K)^+$ . On suppose que le change-point  $\tau$  a une loi exponentielle de paramètre  $q$  et on rappelle que dans ce cas, la mesure  $f$ -minimale est associée à la fonction

$$c_\gamma^*(t) = \frac{(q + \Psi_\gamma) e^{-\Psi_\gamma t}}{q + \Psi_\gamma e^{-(\Psi_\gamma + q)T}}$$

où  $\Psi_\gamma = \frac{\gamma+2}{2} (c(\frac{b}{c} + \frac{1}{2})^2 - \tilde{c}(\frac{\tilde{b}}{\tilde{c}} + \frac{1}{2})^2)$ . On peut donc écrire

$$E_{Q^*}[(e^{X_T} - K)^+] = \int_0^T \frac{(q + \Psi_\gamma) e^{-\Psi_\gamma t}}{q + \Psi_\gamma e^{-(\Psi_\gamma + q)T}} \left( \Phi\left(\frac{-\ln(K) + \sigma(t)}{2\sqrt{\sigma(t)}}\right) - K \Phi\left(\frac{-\ln(K) - \sigma(t)}{2\sqrt{\sigma(t)}}\right) \right) d\alpha(t)$$

où  $\alpha(dt) = qe^{-qt} \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} dt + e^{-qT} \delta_T(dt)$ .

Comme  $0 \leq c_\gamma^* \leq 1$ , le prix est bien sûr compris entre les prix associés aux deux modèles de Black-Scholes de volatilités respectives  $c$  et  $\tilde{c}$ . On note respectivement  $\mathbb{C}(K, T, c)$  et  $\mathbb{C}(K, T, \tilde{c})$  ces deux prix. De plus, si par exemple  $c(\frac{b}{c} + \frac{1}{2})^2 - \tilde{c}(\frac{\tilde{b}}{\tilde{c}} + \frac{1}{2})^2 > 0$ , on a pour tout  $t < T$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} Q^*(\tau < t) &= \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \int_0^t \frac{(q + \Psi_\gamma) e^{-(\Psi_\gamma + q)s}}{q + \Psi_\gamma e^{-(\Psi_\gamma + q)T}} ds \\ &= 0. \end{aligned}$$



On obtient de même

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} Q^*(\tau < t) = 1$$

Ainsi, on en déduit que

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} E_{Q^*}[(e^{X_T} - K)^+] = \mathbb{C}(K, T, \tilde{c}) \text{ et } \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} E_{Q^*}[(e^{X_T} - K)^+] = \mathbb{C}(K, T, c).$$

On obtient les inégalités inverses si  $c(\frac{b}{c} + \frac{1}{2})^2 - \tilde{c}(\frac{\tilde{b}}{\tilde{c}} + \frac{1}{2})^2 < 0$ .

On représente ici les prix  $E_{Q^*}[(e^{X_T} - K)^+]$  en fonction de  $\gamma$  en posant  $K = 1$  et  $T = 1$ .

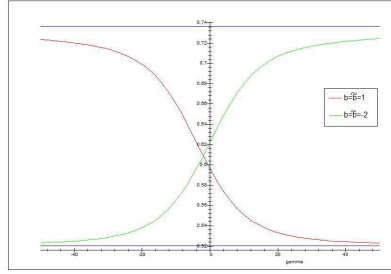


FIG. 4.1: Prix d'un Call Européen associé à la mesure  $f_\gamma$ -minimale en fonction de  $\gamma$

La courbe rouge correspond au cas  $b = \tilde{b} = 1$  et  $c = 2$ ,  $\tilde{c} = 5$  pour lequel  $c(\frac{b}{c} + \frac{1}{2})^2 - \tilde{c}(\frac{\tilde{b}}{\tilde{c}} + \frac{1}{2})^2 = -9/20 < 0$  et la courbe verte au cas  $b = \tilde{b} = -2$  et  $c = 2, \tilde{c} = 5$  pour lequel  $c(\frac{b}{c} + \frac{1}{2})^2 - \tilde{c}(\frac{\tilde{b}}{\tilde{c}} + \frac{1}{2})^2 = 9/20 > 0$ . On note de plus que les prix sont égaux si et seulement si  $\gamma = -2$  car dans ce cas, on a pour tout  $t \leq T$ ,  $c^*(t) = 1$ .

Il est intéressant de noter que les prix ne dépendent pas seulement des volatilités  $c$  et  $\tilde{c}$ , mais aussi de  $b$ . En effet, bien que le drift n'intervienne pas dans l'expression du prix dans un modèle de Black-Scholes, il intervient ici dans la loi de  $\tau$  sous  $Q^*$ . On suppose ici que  $K = T = 1$  et on fixe  $b = 1$ ,  $c = 2$ ,  $\tilde{c} = 5$ . On représente alors les prix pour différentes mesures minimales en fonction de  $\tilde{b}$ .

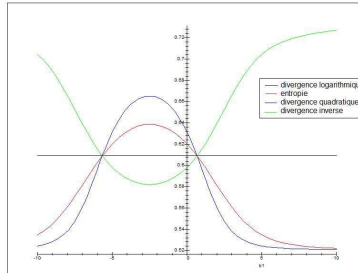


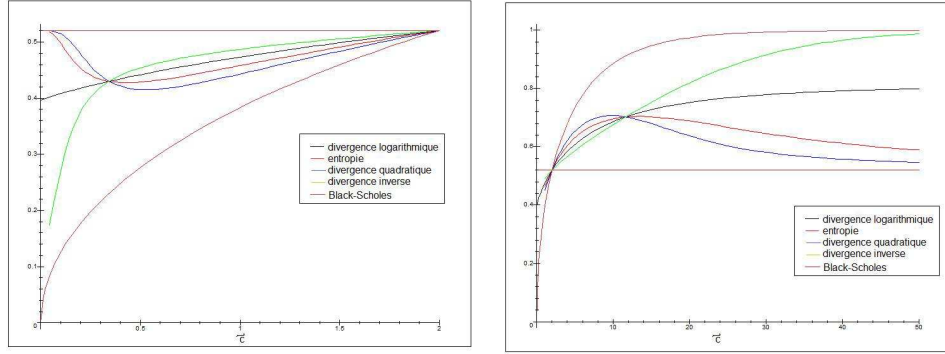
FIG. 4.2: Prix d'un Call Européen associé à la mesure  $f_\gamma$ -minimale en fonction de  $\tilde{b}$

La valeur de  $\tilde{b}$  n'intervient bien sûr pas lorsque  $\gamma = -2$ , puisque dans ce cas, on a  $c^*(t) = 1$ . De plus, toutes les valeurs de  $\gamma$  donnent un même prix lorsque

$$c\left(\frac{b}{c} + \frac{1}{2}\right)^2 - \tilde{c}\left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{c}} + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

ce qui correspond ici aux deux valeurs  $(\sqrt{10}-5/2)$  et  $(-\sqrt{10}-5/2)$ . Notons finalement que des valeurs extrémales sont atteintes lorsque  $\frac{d}{db}\Psi_\gamma = 0$ , c'est-à-dire pour  $\tilde{b} = -\frac{\tilde{c}}{2} = -\frac{5}{2}$ .

On étudie finalement l'influence de  $\tilde{c}$  pour différentes mesures minimales. On suppose ici que  $K = T = 1$ ,  $b = 1$ ,  $\tilde{b} = -1$  et  $c = 2$ .

(a)  $0 < \tilde{c} \leq 2$ (b)  $0 < \tilde{c} \leq 50$ FIG. 4.3: Prix d'un Call Européen associé à la mesure  $f_\gamma$ -minimale en fonction de  $\tilde{c}$ 

Tous les prix sont compris entre les valeurs associées aux modèles de Black-Scholes de volatilité  $c = 2$  et de volatilité  $\tilde{c}$  (courbes oranges). Les mesures minimales donnent toutes les mêmes valeurs lorsque  $\Psi_\gamma = 0$ , c'est-à-dire pour  $\tilde{c} = 2(3 - \sqrt{8})$  et  $\tilde{c} = 2(3 + \sqrt{8})$ . Si  $(\gamma + 2) > 0$ , on a

$$\lim_{\tilde{c} \rightarrow +\infty} \Psi_\gamma = \lim_{\tilde{c} \rightarrow 0} \Psi_\gamma = -\infty$$

et donc, pour tout  $t \leq T$ ,  $\lim_{\tilde{c} \rightarrow +\infty} Q(\tau < t) = \lim_{\tilde{c} \rightarrow 0} Q(\tau < t) = 0$ . Ainsi,

$$\lim_{\tilde{c} \rightarrow +\infty} E_{Q^*}[(e^{X_T} - K)^+] = \mathbb{C}(K, T, c).$$

Au contraire, si  $(\gamma + 2) < 0$ , on a

$$\lim_{\tilde{c} \rightarrow +\infty} \Psi_\gamma = \lim_{\tilde{c} \rightarrow 0} \Psi_\gamma = +\infty.$$

Dans ce cas, pour des petites et des grandes valeurs de  $\tilde{c}$ , le comportement du prix pour le modèle avec change-point est similaire à celui du modèle de Black-Scholes de volatilité  $\tilde{c}$ .

# Conclusion

Le chapitre consacré à l'étude de propriétés de continuité de prix d'options reprend le travail présenté dans l'article [13], accepté pour publication. On obtient des résultats de convergence pour les processus de prix sous les mesures martingales en utilisant en particulier les conditions de convergence en termes de caractéristiques de [41]. Les propriétés spécifiques des processus de Lévy, et notamment la factorisation de Wiener-Hopf, nous permettent alors de déduire d'une simple convergence en loi des propriétés de convergence pour de nombreux prix d'options. Nous appliquons ensuite ces résultats aux différentes mesures minimales considérées dans [32],[38],[43],[49]. Notons que les résultats de ce chapitre, associés à ceux du chapitre 3 sur la forme de stratégies optimales, doivent permettre d'obtenir des résultats de convergence sur les stratégies maximisant certaines fonctions d'utilité.

L'étude de la minimisation de  $f$ -divergences sur l'ensemble des mesures martingales est motivée par les différents travaux consacrés aux mesures minimales pour des fonctions particulières : l'entropie relative ([32],[56],[38]), les  $f^q$ -divergences ([43]) ou la divergence logarithmique ([49]). Toutes ces fonctions ont une dérivée seconde de la forme  $f''(x) = ax^\gamma$  et nous montrons ici comment cette propriété intervient de façon essentielle dans la détermination de la mesure minimale. Nous montrons également que cette famille de fonctions joue un rôle particulier, puisque que, sous certaines conditions, ces fonctions sont les seules à préserver la propriété de Lévy. Les résultats de [33] concernant la dualité entre l'expression de stratégies optimales et la densité de mesures minimales, nous permettent d'obtenir une expression explicite de stratégies optimales pour les fonctions d'utilité associées aux fonctions qui vérifient  $f''(x) = ax^\gamma$ . Cette nouvelle expression, qui unifie les cas traités séparément auparavant, reflète la forme particulière des fonctions de cette famille.

Nous proposons finalement d'introduire, dans un modèle de Lévy, un instant aléatoire de changement des paramètres, indépendant du processus initial. Cette généralisation permet de prendre en compte des variations brusques des paramètres du modèle. Le travail s'inscrit dans le cadre d'études de modèles avec change-point ([73],[35]) et est présenté dans la prépublication [14]. L'application des résultats du chapitre précédent nous permet notamment d'obtenir l'expression des mesures minimales pour toutes les fonctions vérifiant  $f''(x) = ax^\gamma$ , ainsi que les stratégies maximisant les utilités associées. Nous appliquons également ces résultats à la détermination de prix d'options. Notons que les propriétés spécifiques des processus de Lévy, en particulier concernant les lois de premier temps de passage, permettent d'envisager une étude de problèmes similaires dans le cadre de change-points dépendants directement du processus de prix.

# Bibliographie

- [1] M.ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN Handbook of mathematical functions *Dover* (1968)
- [2] E.ANDREAOU, E.GHYSELS Detecting multiple breaks in financial market volatility dynamics *Journal of Appl. Econometrics* 17.5 (2002), p.579-600
- [3] J.P. ANSEL, C.STRICKER Couverture des actifs contingents et prix maximum *Annales de l'IHP* 30.2 (1994), p.303-315
- [4] L.BACHELIER Théorie de la spéculation *Annales Scientifiques de l'ENS* 3e série Tome 17 (1900), p.21-86
- [5] O.E.BARNDORFF-NIELSEN Processes of normal inverse Gaussian type *Finance Stoch.* 2 (1998), p.41-68
- [6] F.BELLINI, M.FRITTELLI On the existence of minimax martingale measures *Math. Finance* 12.1 (2002), p.1-21
- [7] C.BENDER, C.NIETHAMMER On  $q$ -optimal martingale measures in exponential Lévy models *Finance Stoch.* 12. (2008), p.381-410
- [8] J.BERTOIN Lévy processes *Cambridge University Press* (1996)
- [9] F.BLACK, M.SCHOLES The Pricing of Options and Corporate Liabilities *Journal of Political Economy* 81.3 (1973), p. 637-654
- [10] P.BLAESILD, M.SORENSEN 'hyp', a computer program for analyzing data by means of the hyperbolic distribution *Research Report, Dep. Theor. Stats, University of Aarhus* N.248 (1992)
- [11] K.BOROVKOV, A.NOVIKOV On a New Approach to Calculating Expectations for Option Pricing *Journal of Applied Probability* 39.4 (2002), p.889-895
- [12] P.CARR, H.GEMAN, D.MADAN, M.YOR The Fine Structure of Asset Returns : An Empirical Investigation. *J.Business* 2 (2002), p.61-73
- [13] S.CAWSTON, L.VOSTRIKOVA On continuity properties for option prices in exponential Lévy models *Probability Theory and its applications* 54.4 (2009), p.645-670
- [14] S.CAWSTON, L.VOSTRIKOVA Minimal  $f$ -divergence martingale measures and optimal portfolios for exponential Levy models with a change-point *Prépublication, Université d'Angers* N.284 (2010)
- [15] C.S.CHOU, P.A MEYER, C.STRICKER Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés *Séminaire de probabilités XIV* (1980), p.128-139
- [16] T.CHOULLI, C.STRICKER, J.LI Minimal Hellinger martingale measures of order  $q$ . *Finance and Stochastics* 11.3 (2007), p.399-427

- [17] F.DELBAEN, P.GRANDITS, T.RHEINLÄNDER, D.SAMPERI, M.SCHWEIZER, C.STRICKER Exponential Hedging and Entropic Penalties *Math. Finance* 12.2 (2002), p.99-123
- [18] F.DELBAEN, W.SCHACHERMAYER A general version of the fundamental theorem of asset pricing *Math. Ann.* 300 (1994), p.463-520
- [19] F.DELBAEN, W.SCHACHERMAYER The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes *Math. Ann.* 312 (1996), p.215-250
- [20] A.DIAS, P.EMBRECHTS Change-point analysis for dependence structures in finance and insurance. *Risk Measures for the 21st century*, ed. Giorgio Szegeo, *Wiley Finance Series* (2004), p.321-335
- [21] E.EBERLEIN Application of Generalized Hyperbolic Lévy Motions to Finance in *Lévy Processes : Theory & Applications*, *Birkhäuser* (2001)
- [22] E.EBERLEIN Jump-type Levy processes. In *Handbook of Financial Series*. Springer Verlag, (2007)
- [23] E.EBERLEIN, E.HAMMERSTEIN Generalized Hyperbolic and Inverse Gaussian distributions : Limiting cases and Approximations of Processes *Preprint, University of Freiburg* 80 (2002)
- [24] E.EBERLEIN, J.JACOD On the Range of Options Prices *Finance Stochast.* 1.2 (1997), p.131-140
- [25] E.EBERLEIN, U.KELLER Hyperbolic distributions in finance *Bernoulli* 1.3 (1995), p.281-299
- [26] E.EBERLEIN, F.OZKAN Time consistency of Levy models. *Quantitative Finance*, 3 (2003), p.40-50
- [27] R.ELLIOTT, L.CHAN, TK. SIU Option pricing and Esscher transform under regime switching *Annals of Finance* 1 (2005), p.423-432
- [28] M.EMERY Compensation de processus à variation finie non localement intégrables, *Séminaire de probabilités XIV* (1980), p152-160
- [29] F.ESSCHE, M.SCHWEIZER Minimal entropy preserves the Lévy property : how and why. *Stoch. Proc. Appl.* 115.2 (2005), p.299-327
- [30] H.FOLLMER, M.SCHWEIZER Hedging of Contingent Claims under Incomplete information, in : M.H Davis and R.J Elliott(eds), '*Applied Stochastic Analysis*', *Stochastic Monographs*, Vol.5, Gordon and Breach, London/New York (1991), p.389-414
- [31] M.FRITTELLI Introduction to a theory of value coherent with the no-arbitrage principle, *Finance Stoch.*, 4.3 (2000), p.275-297
- [32] T.FUJIWARA, Y.MIYAHARA The Minimal Entropy Martingale Measures for Geometric Levy Processes. *Finance Stoch.* 7 (2003), p. 509-531
- [33] T.GOLL, J.KALLSEN Optimal portfolios for logarithmic utility. *Stochast. Appl.* 89 (2000), p. 31-48
- [34] T.GOLL, L.RÜSCHENDORF Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization. *Finance Stoch.* 5 (2001), p. 557-581

- [35] X.GUO Information and option pricings *Quantitative Finance* 1.1 (2001), p. 38-44
- [36] J.HARRISON, S.PLISKA Martingales and Stochastic Integrals in the theory of continuous trading *Stoch. Proc. Appl.* 11 (1981), p.215-260
- [37] F.HUBALEK, W.SCHACHERMAYER When does convergence of asset price processes imply convergence of option prices ? *Math. Finance* 8.4 (1998), p. 385-403
- [38] F.HUBALEK, C.SGARRA Esscher transforms and the minimal entropy martingale measure for exponential Levy models *Quantitative finance* 6.2 (2006), p.125-145
- [39] W.HUDSON, J.MASON More on equivalence of infinitely divisible distributions *Annals of Prob.* 3.3 (1975), p.563-568
- [40] W.HUDSON, H.TUCKER Equivalence of infinitely divisible distributions *Annals of Prob.* 3.1 (1975), p.70-79
- [41] J.JACOD, A.SHIRYAEV Limit Theorems for Stochastic Proceses *Springer* (1987)
- [42] P.JAKUBENAS On Option Pricing in Certain Incomplete Markets *Proc. Steklov Inst. Math.* 237 (2002) p.114-133
- [43] M.JEANBLANC, S.KLÖPPEL, Y.MIYAHARA Minimal  $f^q$ -martingale measures for exponential Levy processes. *Ann. Appl. Probab.* Vol.17.5/6 (2007), p.1615-1638
- [44] Y.KABANOV, C.STRICKER On the optimal portfolio for the exponential utility maximisation : remarks to the six-author paper *Math. Finance* 12.2 (2002), p.125-134
- [45] J.KALLSEN Optimal Portfolios for Exponential Lévy Processes. *Math Met Oper Res* 51 (2000), p.357-374
- [46] J.KALLSEN, A.SHIRYAEV The cumulant process and Esscher's change of measure *Finance Stochast.* 6 (2002), p.397-428
- [47] C.KARDARAS No-free-lunch equivalences for exponential Levy models under convex constraints on investment *Math. Finance* 19.2 (2009), p161-187
- [48] S.KASSBERGER, T.LIEBMANN  $q$ -Optimal Martingale Measures for Exponential Lévy Processes *Preprint Uni. Ulm* (2007)
- [49] S.KLÖPPEL Dynamic Valuations in Incomplete Markets. *Diss. ETH* 16666 (2006)
- [50] D.KRAMKOV, W.SCHACHERMAYER The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *Ann. Appl. Probab.* Vol 9.3 (1999), p.904-950
- [51] YU. KUTOYANTS Identification of dynamical Systems with Small Noise *Kluwer, Dordrecht* (1994)
- [52] A.KYPRIANOU Introductory Lectures On Fluctuations of Lévy Processes with Applications *Springer* (2006)
- [53] F.LIESE, I.VAJDA Convex Statistical distances. Leipzig : Teubner (1987)
- [54] D.B MADAN, E.SENETA The variance Gamma (VG) Model for Share Market Returns. *Journal of Business* 63 (1990), p.511-524

- [55] R.MERTON Theory of Rational Option Pricing *Bell Journal of Economics and Management science* 4.1 (1973), p. 141-183
- [56] Y.MIYAHARA Minimal Entropy Martingale Measures of Jump Type Price Processes in Incomplete Assets Markets. *Asian-Pacific Financial Markets*. 6.2 (1999), p. 97-113
- [57] E.MORDECKI Optimal stopping and perpetual options for Levy processes *Finance Stochast.* 6 (2002), p.473-493
- [58] M.MUSIELA, M.RUTKOWSKI Martingale Methods in Financial Modelling *Springer* (1998)
- [59] E.S. PAGE A test for a change in parameter occuring at an unknown point. *Biometrika* (1955), p.523-527
- [60] E.S. PAGE On problems in which a change in parameter occurs at an unknown point. *Biometrika* (1957), p.248-252
- [61] A.PAPAPANTOLEON Applications of Semimartingales and Lévy Processes in Finance : duality and valuation *Diss. Freiburg* (2006)
- [62] A.POLYANIN, V.ZAITSEV Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations *Chapman&Hall/CRC, Boca Raton*, (2003)
- [63] K.PRAUSE The generalized hyperbolic model : estimations, financial derivatives and risk measures *Diss. Freiburg* (1999)
- [64] P.PROTTER Stochastic Integration and Differential Equations *Springer* (1995)
- [65] S.RAIBLE Levy processes in Finance : theory, numerics and empirical facts. *Diss Freiburg* (2000)
- [66] L.RÜSCHENDORF On the minimum discrimination information theorem *Statist. Dec. Suppl. Iss 1* (1984), p.263-283
- [67] P.SAMUELSON Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly *Ind. Management Review* 6.2 (1965)
- [68] K.SATO Lévy processes and infinitely divisible distributions *Cambridge University Press* (1999)
- [69] W.SCHACHERMAYER A super-martingale property of the optimal portfolio process. *Finance Stoch.* 7 (2003), p.433-456
- [70] M.SCHWEIZER On the minimal martingale measure and the Föllmer-Schweizer decomposition. *Stochastic Analysis and Applications* 13 (1995), p.573-599
- [71] M.SCHWEIZER A Guided Tour through Quadratic Hedging approaches, *In :E.Jouini, J.Cvitanic, M.Musiela (eds.) : 'Option Pricing, Interest Rates and Risk Management'*, Cambridge University Press (1999), p.538-574
- [72] A.SELIVANOV On the Martingale Measure in Exponential Levy models *Theory Probab. Appl.* 49.2 (2005), p.261-274
- [73] A.SHIRYAEV On optimum methods in quickest detection problems. *Theory Prob. Appl.* 8. (1963), p.22-46
- [74] A.SHIRYAEV Essentials of Stochastic Finance *World Scientific, Singapore* (1999)
- [75] A.SHIRYAEV Quickest detection problems in the technical analysis of financial data *Mathematical Finance-Bachelier Congress, Springer* (2000), p.487-521

- [76] A.SHIRYAEV, A.CHERNY Vector stochastic integrals and the fundamental theorems of asset pricing *Proc. Steklov Math. Institute* 237 (2002), p.12-56
- [77] H.TUCKER The supports of infinitely divisible distribution functions *Proceedings of the AMS* 49.2 (1975), p.436-440
- [78] V.VIGON Simplifiez vos Lévy en titillant la factorisation de Wiener-Hopf *Thèse de doctorat, INSA Rouen* (2002)
- [79] L. YU. VOSTRIKOVA Detection of changes of mean functions in random processes. *Theory Probab. Appl.*, 25 (1980) p.867-869.
- [80] L.YU. VOSTRIKOVA On the detection of "discordance" of Wiener process. *Theory Probab. Appl.* , 26 (1981) p.362-368.
- [81] L. YU. VOSTRIKOVA Detecting disorder in multidimensional random processes. *Soviet Math. Dokl.* , 24 (1981) p.55-59.
- [82] L.YU VOSTRIKOVA Functional limit theorems for the disorder problem. *Stochastics* 9. (1983) p.103-124.
- [83] M.YOR Sous-espaces denses dans  $L^1$  ou  $H^1$  et représentation de martingales. *Séminaire de Probabilités XII* (1978), p. 265-309
- [84] M.YOR Aspects des mathématiques financières *Actes de colloques 1er février 2005, Académie des sciences Tec et Doc* (2006)